Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
Волгоградский государственный педагогический университет

Универсальная АЛГЕБРА и ее приложения

ТРУДЫ

участников международного семинара, посвященного памяти профессора Московского государственного университета

Л. А. Скорнякова

Волгоград, 6 — 11 сентября 1999 г.

Волгоград
«Перемена»
2000

ББК 22.14
У 591

Издание частично поддержано грантом РФФИ 99-01-10082.

Универсальная алгебра и ее приложения: Тр. участ.
У 591 междунар. семинара, посвящ. памяти проф. Моск. гос. ун-та Л. А. Скорнякова. Волгоград, 6—11 сент. 1999 г. — Волгоград: Перемена, 1999. — 307 с.

ISBN 5-88234-428-X

В сборник помещены труды участников международного семинара «Универсальная алгебра и ее приложения», посвященного памяти профессора Л. А. Скорнякова.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов математических факультетов университетов.

ББК 22.14

ISBN 5-88234-428-X

П. А. Крылов, М. А. Приходовский (Томск)

Обобщенные T-модули и E-модули[1]

В [1] и [2] введены и изучались E-кольца и $E(R)$-модули. Систематическое исследование $E(R)$-модулей осуществлено в [3]. R-модуль A называется $E(R)$-модулем, если $Hom_Z(R, A) = Hom_R(R, A)$ (R – коммутативное кольцо, Z – кольцо целых чисел). Кольцо R называется E-кольцом, если R_R является $E(R)$-модулем. E-кольца и E-модули находят разнообразные применения в теории абелевых групп и их колец эндоморфизмов (например, [4;5]). В [2] определено также T-кольцо как такое кольцо R, что $R \otimes_S R \cong R$ канонически. Приведенные определения существенно связаны с гомоморфизмом колец $Z \to R$. В настоящей статье эти определения переносятся на случай гомоморфизма $e : S \to R$ произвольных колец. Получающиеся модули называются (обобщенными) $E(R)$-модулями и $T(R)$-модулями относительно e, а кольца – E-кольцами и T-кольцами относительно e.

В разд.2 рассматриваются свойства $T(R)$-модулей и $E(R)$-модулей. Это применяется в разд.3 к T-кольцам и E-кольцам. В разд.4 формулируются следующие основные проблемы о T-модулях и E-модулях. Для данного кольца S описать S-модули, являющиеся $T(R)$-модулями ($E(R)$-модулями) для некоторого кольца R и гомоморфизма колец $e : S \to R$. Показывается, что при определенных условиях класс таких S-модулей определяет кольцо R с точностью до изоморфизма. Выявляется также интересная связь рассматриваемых вопросов с проблемой единственности модульной структуры на абелевой группе. Некоторые полученные результаты обобщают соответствующие факты из [1–3]. Частично они были анонсированы в [6]. Авторы планируют применить результаты общего характера статьи к конкретным классам модулей и продолжить исследования по ряду направлений.

Встречающиеся в статье кольца – ассоциативные с единицей, модули – унитарные и правые, если не оговорено противное. Единичные элементы колец S и R обозначаем 1_S и 1_R соответственно или просто 1, если не возникает путаницы. Аналогично образующие элементы тензорных произведений $A \otimes_S R$, $A \otimes_R R$ обозначаем $a \otimes_S r$, $a \otimes_R r$ или просто $a \otimes r$. Другие используемые обозначения и понятия широко известны.

[1]Работа поддержана РФФИ, грант 97-01-00795.

1. Гомоморфизмы t и h

Пусть даны кольца S и R и кольцевой гомоморфизм $e : S \to R$. Всякий R-модуль A рассматриваем как притягивающий S-модуль. Кольцо S действует на A по правилу: $as = ae(s)$ для любых $a \in \in A, s \in S$. Аналогичным способом левые R-модули считаем левыми S-модулями. В частности, R будет $S-S$-бимодулем. При этом $e(xy) = e(x)e(y) = e(x)y = xe(y)$ для всех $x, y \in S$. Следовательно, что важно для дальнейшего, отображение e является гомоморфизмом S-S-бимодулей. Фактормодуль $R/e(S)$ обозначаем R_0.

Пусть A и P – R-модули. Любой R-гомоморфизм $P \to A$ является S-гомоморфизмом. Это дает вложение абелевых групп $h : Hom_R(P, A) \to Hom_S(P, A)$. Если P – некоторый левый R-модуль, то имеем эпиморфизм абелевых групп $t : A \otimes_S P \to A \otimes_R P$, $a \otimes_S b \to a \otimes_R b$, где $a \in A, b \in P$.

Рассмотрим подробнее гомоморфизм $t : A \otimes_S R \to A \otimes_R R$. Здесь $A \otimes_S R$ и $A \otimes_R R$ – канонические правые R-модули и S-модули, причем последний является притягивающим, а t – модульный гомоморфизм.

Лемма 1.1. *Для любых $a \in A$ и $s \in S$ справедливо равенство $a \otimes_S e(s) = ae(s) \otimes_S 1_R$.*

Действительно, $a \otimes_S e(s) = a \otimes_S e(s)1_R = a \otimes_S s1_R = as \otimes_S 1_R = = ae(s) \otimes_S 1_R$.

Введем еще гомоморфизм S-модулей $q : A \otimes_R R \to A \otimes_S R$ по правилу $q : a \otimes_R r \to ar \otimes_S 1_R$. Для элементов $a \in A, r \in R$ получаем $tq(a \otimes_R r) = t(ar \otimes_S 1_R) = ar \otimes_R 1_R = a \otimes_R r$. Следовательно, tq действует тождественно на $A \otimes_R R$, а t расщепляется, т. е. $A \otimes_S R = = im\, q \oplus ker\, t$. Подмодуль $im\, q$ равен $\{a \otimes_S 1_R | a \in R\}$, а $ker\, t$ порождается всеми элементами вида $a \otimes_S r - ar \otimes_S 1_R$, где $a \in A, r \in R$. При этом $a \otimes_S r = (ar \otimes_S 1_R) + (a \otimes_S r - ar \otimes_S 1_R)$.

Представим по-иному подмодуль $ker\, t$. Для этого запишем индуцированную точную последовательность S-модулей

$$A \otimes_S e(S) \xrightarrow{f} A \otimes_S R \xrightarrow{g} A \otimes_S R_0 \to 0.$$

Проверим, что $im\, f = ker\, g$. Для элемента $a \otimes_R r \in A \otimes_R R$ получаем $gq(a \otimes_R r) = g(ar \otimes_S 1_R) = 0$ и $im\, q \subseteq ker\, g$. Поскольку $im\, f = ker\, g$, то осталось убедиться, что $im\, f \subseteq im\, q$. Возьмем элемент $a \otimes_S e(s) \in \in A \otimes_S e(S)$. Тогда $f(a \otimes_S e(s)) = a \otimes_S e(s) \in A \otimes_S R$. Учитывая лемму 1.1, находим $a \otimes_S e(s) = ae(s) \otimes_S 1_R \in im\, q$. Итак, $im\, q = ker\, g$. Можно записать канонические изоморфизмы S-модулей

$$ker\, t \approx (A \otimes_S R)/im\, q = (A \otimes_S R)/ker\, g \approx im\, g = A \otimes_S R_0.$$

Можно утверждать, что соответствие образующих элементов

$$a \otimes_S r - ar \otimes_S 1_R \to a \otimes_S (r + S), a \in A, r \in R$$

определяет изоморфизм S-модулей $ker\, t$ и $A \otimes_S R_0$. Мы доказали такое утверждение (факт расщепления отображения t отмечался в [7]).

Предложение 1.2. *Гомоморфизм S-модулей $t : A \otimes_S R \to A \otimes_R R$ расщепляется. При этом $ker\, t \approx A \otimes_S R_0$ и справедлив канонический изоморфизм S-модулей*

$$A \otimes_S R \approx A \otimes_R R \oplus A \otimes_S R_0,$$

где $a \otimes_S r \to a \otimes_R r + a \otimes_S (r + S), a \in A, r \in R.$

Исследуем теперь вложение $h : Hom_R(R, A) \to Hom_S(R, A)$, где обе группы гомоморфизмов являются R-модулями и притягивающими S-модулями. Именно, если $\varphi : R \to A$ – R-гомоморфизм или S-гомоморфизм, $r, x \in R$ и $s \in S$, то $(\varphi r)x = \varphi(rx), (\varphi s)x = \varphi(sx)$ и $\varphi s = \varphi e(s)$. R-гомоморфизм $\varphi : R \to A$ действует как $\varphi(x) = \varphi(1_R)x, x \in R$ и соответствие $\varphi \to \varphi(1_R)$ дает изоморфизм R-модулей $Hom_R(R, A) \to A$.

Построим отображение $p : Hom_S(R, A) \to Hom_R(R, A)$, полагая $p(\varphi) = \overline{\varphi}$ для $\varphi \in Hom_S(R, A)$, где $\overline{\varphi}(x) = \varphi(1_R)x$ при всех $x \in R$. Ясно, что p сохраняет сумму. Для $s \in S$ можно написать $p(\varphi s)(x) = \overline{\varphi s}(x) = (\varphi s)(1_R)x = \varphi(s1_R)x = \varphi(1_R s)x = \varphi(1_R)(sx)$ и $(p(\varphi)s)(x) = p(\varphi)(sx) = \overline{\varphi}(sx) = \varphi(1_R)(sx)$. Откуда $p(\varphi s) = p(\varphi)s$ и p – S-гомоморфизм.

Пусть $\varphi \in Hom_R(R, A), x \in R$. Тогда $(ph(\varphi))(x) = h(\varphi)(1_R)x = \varphi(1_R)x = \varphi(x)$. Значит, $ph = 1$ на $Hom_R(R, A)$ и h расщепляется. Таким образом, $Hom_S(R, A) = im\, h \oplus ker\, p = Hom_R(R, A) \oplus \{\varphi \in Hom_S(R, A) | \varphi(1_R) = 0\}$, где $\varphi = \overline{\varphi} + (\varphi - \overline{\varphi})$ для $\varphi \in Hom_S(R, A)$. Заметим еще, что $\varphi(xe(s)) = \varphi(xs) = \varphi(x)s = \varphi(x)e(s)$ $(x \in R, s \in S$; этот факт подобен лемме 1.1). Возьмем теперь $\varphi \in ker\, p, s \in S$ и вычислим $\varphi(e(s)) = \varphi(1_R e(s)) = \varphi(1_R)e(s) = 0$. Заключаем, что $ker\, p = \{\varphi \in Hom_S(R, A) | \varphi(e(S)) = 0\}$. Последний же модуль отождествляется с $Hom_S(R_0, A)$. Можем записать следующее утверждение.

Предложение 1.3. *Имеет место прямое разложение S-модулей*

$$Hom_S(R, A) = Hom_R(R, A) \oplus Hom_S(R_0, A).$$

Вернемся к общей ситуации. Возьмем гомоморфизмы $t : A \otimes_S P \to A \otimes_R P$ (P – левый R-модуль) и $h : Hom_R(P, A) \to Hom_S(P, A)$

(P – правый R-модуль). Здесь t и h – только аддитивные гомоморфизмы.

Следствие 1.4. *1) Если P – проективный левый R-модуль, то t расщепляется.*

2) Если P – проективный правый R-модуль, то h расщепляется, т. е. $Hom_R(P,A)$ – прямое слагаемое в $Hom_S(P,A)$.

Доказательство. 1) Пусть $P \oplus V = F$, где V – некоторый левый R-модуль, $F = \oplus_{i\in I} R_i$, $R_i = R$ для всех i. Далее под знаками $\oplus$ и $\prod$ опускаем "$i \in I$".

Имеем изоморфизмы $A \otimes_S F \approx \oplus(A\otimes_S R_i)$ и $A \otimes_R F \approx \oplus(A \otimes_R R_i)$. Обратим внимание на то, что эти и встречающиеся ниже изоморфизмы являются естественными. Каждый гомоморфизм

$$t_i : A\otimes_S R_i \to A \otimes_R R_i$$

расщепляется (предложение 1.2). Поэтому и гомоморфизм

$$t_F : A \otimes_S F \to A\otimes_R F,$$

как сумма всех $t_i (i \in I)$, также расщепляется. Запишем еще изоморфизм

$$A \otimes_S F \approx (A \otimes_S P) \oplus (A \otimes_S V)$$

и подобный изоморфизм с заменой S на R. Теперь ясно, что t расщепляется.

2) Пусть $P \oplus W = F$, где W – некоторый R-модуль, $F = \oplus_{i\in I} R_i$, $R_i = R (i \in I)$. Имеем изоморфизмы

$$Hom_S(F,A) \approx \prod Hom_S(R_i, A), \quad Hom_R(F,A) \approx \prod Hom_R(R_i, A).$$

Для каждого $i \in I$ $Hom_R(R_i, A)$ – прямое слагаемое в $Hom_S(R_i, A)$. Нужный результат получается теперь ввиду того, что $Hom_S(P, A)$ (соответственно $Hom_R(P,A)$) – прямое слагаемое в $Hom_S(F, A)$ (соответственно $Hom_R(F, A)$).

2. $T(R)$-модули и $E(R)$-модули

Фиксируем гомоморфизм колец $e : S \to R$. Используем отображения t и h из разд.1.

Определение 2.1. *1) R-модуль A назовем $T(R)$-модулем относительно e, если $t : A\otimes_S R \to A\otimes_R R$ – изоморфизм.*

2) Модуль A назовем $E(R)$-модулем относительно e, если $Hom_R(R, A) = Hom_S(R, A)$, т. е. h – изоморфизм.

Кратко будем говорить "T-модуль относительно e" или просто "T-модуль". То же самое для $E(R)$-модулей. Можно ввести левые

T-модули и E-модули. Рассматриваем далее правые модули и правые свойства. Исключения оговариваются. T-модули (E-модули) относительно гомоморфизма $Z \to R$ называем T-модулями (E-модулями) в обычном смысле. Нетрудно проверить, что $T(R)$-модули ($E(R)$-модули) в обычном смысле будут T-модулями (E-модулями) относительно любого гомоморфизма колец $S \to R$.

Для R-модуля A запишем следующую последовательность S-гомоморфизмов

$$A \xrightarrow{\overset{-1}{\omega_S}} A \otimes_S S \xrightarrow{1 \otimes e} A \otimes_S R \underset{q}{\overset{t}{\rightleftarrows}} A \otimes_R R \xrightarrow{\omega_R} A, \quad (1)$$

в которой ω_S и ω_R – естественные изоморфизмы, $tq = 1$ (предложение 1.2) и $t(1 \otimes e) = \overset{-1}{\omega_R}\, \omega_S$. Положим еще $\omega = (1 \otimes e)\overset{-1}{\omega_S}$. Ясно, что $1 \otimes e$ и ω – мономорфизмы. Запишем также коммутативную диаграмму S-модулей

$$\begin{array}{ccccccc} & & A \otimes_S S & \xrightarrow{1 \otimes e} & A \otimes_S R & & \\ & & \downarrow k_1 & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & A \otimes_S e(S) & \xrightarrow{g} & A \otimes_S R & \longrightarrow & A \otimes_S R_0 \longrightarrow 0, \end{array} \quad (2)$$

в которой все отображения – индуцированные, причем k – изоморфизм, g – мономорфизм, т. е. нижняя строка точна.

Предложение 2.2. *1) Отображения $1 \otimes e$, ω и g являются мономорфизмами.*

2) Следующие условия эквивалентны:

а) A – $T(R)$-модуль;

б) $1 \otimes e$ – эпиморфизм;

в) ω – эпиморфизм;

г) g – эпиморфизм;

д) $A \otimes_S R_0 = 0$.

Доказательство. Эквивалентность а) и б) вытекает из определения T-модуля и равенства $t(1 \otimes e) = \overset{-1}{\omega_R}\, \omega_S$. Эквивалентность б)–д) содержится в рассуждениях, проведенных выше. Предложение доказано.

Если A – только S-модуль (заранее он не несет структуры R-модуля), то имеем лишь гомоморфизмы ω_S, $1 \otimes e$, ω, g и диаграмму (2) без нуля слева. Из диаграммы получается следствие.

Следствие 2.3. *Для S-модуля A справедливы импликации ω – эпиморфизм $\Leftrightarrow$ $1 \otimes e$ – эпиморфизм $\Leftrightarrow$ g – эпиморфизм $\Leftrightarrow$ $A \otimes_S R_0 = 0$.*

Рассмотрим свойства замкнутости класса T-модулей.

Предложение 2.4. *1) Предел прямого спектра T-модулей является T-модулем. В частности, прямая сумма T-модулей является T-модулем.*

2) Фактормодуль T-модуля является T-модулем.

Доказательство. Пусть $\{A_i | i \in I\}$ – прямой спектр T-модулей и A – его предел. Учитывая предложение 2.2, получаем $A \otimes_S R_0 \approx \approx \varinjlim(A_i \otimes_S R_0) = 0$ и A – T-модуль. Если B – подмодуль T-модуля A, то $A \otimes_S R_0 = 0$ (предложение 2.2). Откуда $A/B \otimes_S R_0 = 0$ и A/B – T-модуль по предложению 2.2.

Определение 2.5. *Гомоморфизм $e : S \to R$ называется центральным, если подкольцо $e(S)$ лежит в центре кольца R.*

Очевидно, гомоморфизм $Z \to R$ централен. Пусть $e : S \to R$ – центральный гомоморфизм (в таком случае кольцо $e(S)$ коммутативно), A – R-модуль и притягивающий S-модуль. Полагая $sa = as$ для всех $s \in S$, $a \in A$, получаем структуру левого S-модуля на A, при этом A – S-R-бимодуль. Пусть B – $e(S)$-модуль (в частности, левый или правый R-модуль). Тогда $A \otimes_S B$ – R-модуль, если считать, что $(a \otimes b)r = ar \otimes b$ для $a \in A, b \in B, r \in R$. R-модули $A \otimes_S B$ и $B \otimes_S A$ канонически изоморфны. Поскольку R_0 является $e(S)$-модулем, то $A \otimes_S R_0$ и $R_0 \otimes_S A$ изоморфны как R-модули. Далее формула $(\varphi r)(b) = (\varphi b)r$ $(\varphi \in Hom_S(B, A), b \in B, r \in R)$ определяет структуру правого R-модуля на $Hom_S(B, A)$. Как частный случай имеем, что $Hom_S(R_0, A)$ – правый R-модуль. Справедливы, конечно, лево-правые аналогии приведенных фактов.

Вернемся к произвольному гомоморфизму колец $e : S \to R$.

Предложение 2.6. *Пусть A – $T(R)$-модуль, B – левый R-модуль. Тогда*

1) $A \otimes_S B \approx A \otimes_R B$ канонически;

2) если e – центральный гомоморфизм, то R-модуль $A \otimes_S B$ является $T(R)$-модулем.

Доказательство. 1) Имеем канонические изоморфизмы $A \otimes_S B \approx \approx A \otimes_S (R \otimes_R B) \approx (A \otimes_S R) \otimes_R B \approx (A \otimes_R R) \otimes_R B \approx A \otimes_R (R \otimes_R \otimes_R B) \approx A \otimes_R B$.

2) Используя свойства центрального гомоморфизма и предложение 2.2, получаем

$$(A \otimes_S B) \otimes_S R_0 \approx (A \otimes_S R_0) \otimes_S B = 0$$

и $A \otimes_S B$ – $T(R)$-модуль. Предложение доказано.

Перейдем к $E(R)$-модулям относительно гомоморфизма колец $e: S \to R$. Для R-модуля A имеет место следующая последовательность S-гомоморфизмов:

$$A \xrightarrow{\pi_R^{-1}} Hom_R(R, A) \underset{p}{\overset{h}{\rightleftarrows}} Hom_S(R, A) \xrightarrow{e^*} Hom_S(S, A) \xrightarrow{\pi_S} A. \quad (3)$$

Здесь π_R, π_S – естественные изоморфизмы, e^* индуцируется e, $e^* h = \pi_S^{-1} \pi_R$ и $ph = 1$ (предложение 1.3). Пусть $\pi = \pi_S e^*$, где $\pi(\varphi) = \varphi(1_R)$ для любого $\varphi \in Hom_S(R, A)$. Кроме того, e^* и π – эпиморфизмы. Можно еще записать коммутативную диаграмму S-модулей

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Hom_S(R_0, A) \arrow[r] & Hom_S(R, A) \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Hom_S(e(S), A) \arrow[r] \arrow[d, "m"] & 0 \\
 & & Hom_S(R, A) \arrow[r, "e^*"] & Hom_S(S, A), &
\end{tikzcd} \quad (4)$$

в которой все отображения – индуцированные, причем m – изоморфизм, а f – эпиморфизм, т. е. верхняя строка точна.

Предложение 2.7. *1) Отображения e^*, π и f являются эпиморфизмами.*

2) Следующие условия эквивалентны:

а) A – $E(R)$-модуль;

б) e^* – мономорфизм;

в) π – мономорфизм;

г) f – мономорфизм, т. е. для любого S-модульного гомоморфизма $\varphi: R \to A$ из $\varphi e = 0$ следует $\varphi = 0$;

д) $Hom_S(R_0, A) = 0$;

е) любой S-гомоморфизм $\varphi: R \to A$ действует как $\varphi(x) = \varphi(1_R)x$, $x \in R$.

Доказательство. Эквивалентность а) и б) вытекает из определения E-модуля и равенства $e^{*}h = \pi_S^{-1}\pi_R$. Эквивалентность б) – д) содержится в рассмотрениях, проведенных выше. Эквивалентность а) и е) следует из определения E-модуля. Предложение доказано.

Пусть A – S-модуль. Тогда имеем лишь гомоморфизмы π_S, e^{*}, π, f и диаграмму (4) без нуля справа. Справедливо также следствие.

Следствие 2.8. *Имеют место импликации: e^{*} – мономорфизм $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ π – мономорфизм $\Leftrightarrow$ f – мономорфизм $\Leftrightarrow$ $Hom_S(R_0, A) = 0$.*

Предложение 2.9. *1) Предел обратного спектра E-модулей является E-модулем. В частности, произведение E-модулей будет E-модулем.*

2) Подмодуль E-модуля является E-модулем.

3) Прямая сумма E-модулей является E-модулем.

Доказательство. 1) Пусть $\{A_i | i \in I\}$ – обратный спектр E-модулей и A – его предел. Ввиду предложения 2.7, д имеем $Hom_S(R_0, A) \approx$ $\approx \varprojlim Hom_S(R_0, A_i) = 0$ и A – E-модуль.

Утверждение 2) также выводится из предложения 2.7, д.

3) Прямая сумма является подмодулем произведения. Можно применить 1) и 2).

Предложение 2.10. *1) Пусть A и B – R-модули. Если либо A – T-модуль, либо B – E-модуль, то $Hom_S(A, B) = Hom_R(A, B)$.*

2) Если e – центральный гомоморфизм, то в ситуации 1) $Hom_S(A, B)$ – $E(R)$-модуль.

Доказательство. 1) Если A – T-модуль, то имеем естественные изоморфизмы $Hom_S(A, B) \approx Hom_S(A, Hom_R(R, B)) \approx Hom_R(A \otimes_S \otimes_S R, B) \approx Hom_R(A \otimes_R R, B) \approx Hom_R(A, B)$. Для E-модуля B получаем $Hom_S(A, B) \approx Hom_S(A \otimes_R, B) \approx Hom_R(A, Hom_S(R, B)) \approx Hom_R(A, Hom_R(R, B)) \approx Hom_R(A, B)$.

2) R-модули $A \otimes_S R_0$ и $R_0 \otimes_S A$ изоморфны. Для T-модуля A они равны нулю (предложение 2.2). Поэтому $Hom_S(R_0, Hom_S(A, B)) \approx$ $\approx Hom_S(R_0 \otimes_S A, B) = 0$.

Если B – E-модуль, то $Hom_S(R_0, Hom_S(A, B)) \approx Hom_S(A \otimes_S \otimes_S R_0, B) \approx Hom_S(A, Hom_S(R_0, B)) = 0$. В обоих случаях $Hom_S(A, B)$ – E-модуль в силу предложения 2.7.

3. T-кольца и E-кольца

Пусть дан гомоморфизм колец $e : S \to R$.

Определение 3.1. *Если модуль R_R является $T(R)$-модулем ($E(R)$-модулем) относительно e, то кольцо R назовем T-кольцом (E-кольцом) относительно e или кратко T-кольцом (E-кольцом).*

Фактически мы ввели правые T-кольца и E-кольца. Можно определить левые T-кольца и E-кольца. Свойство быть T-кольцом лево-право симметрично. Под E-кольцом понимаем правое E-кольцо. T-кольцо (E-кольцо) относительно гомоморфизма $Z \to R$ будем называть T-кольцом (E-кольцом) в обычном смысле. Такие T-кольца (E-кольца) являются T-кольцами (E-кольцами) относительно любого гомоморфизма колец $S \to R$. Отображения $1 \otimes e, \omega, g$ ниже те же, что в предложении 2.2.

Предложение 3.2. *Следующие условия эквивалентны:*

1) R – *T-кольцо;*
2) $1 \otimes e : R \otimes_S S \to R \otimes_S R$ – *изоморфизм;*
3) $\omega : R \to R \otimes_S R$ – *изоморфизм;*
4) $g : R \otimes_S e(S) \to R \otimes_S R$ – *изоморфизм;*
5) $\sigma : R \otimes_S R \to R,\ x \otimes y \to xy$ – *изоморфизм;*
6) $R \otimes_S R_0 = 0$;
7) $R_0 \otimes_S R = 0$.

Доказательство. Условия 1) – 4) соответствуют условиям а) – г) предложения 2.2. В 5) $\sigma = \omega_R t$ (см. последовательность (1) в разд.1), откуда получается эквивалентность 1) и 5). Свойство быть T-кольцом лево-право симметрично, поэтому 1), 6) и 7) эквивалентны в силу предложения 2.2.

В следующем утверждении отображения e^*, π и f взяты из предложения 2.7.

Предложение 3.3. *Следующие условия эквивалентны:*

1) R – *E-кольцо;*
2) $e^* : Hom_S(R, R) \to Hom_S(S, R)$ – *изоморфизм;*
3) $\pi : End_S R \to R$ – *изоморфизм;*
4) $f : Hom_S(R, R) \to Hom_S(e(S), R)$ – *изоморфизм;*
5) $Hom_S(R_0, R) = 0$;
6) для любого $\alpha \in End_S R$ *существует такой* $r \in R$, *что* $\alpha(x) = rx$ *при всех* $x \in R$;
7) если $\alpha \in End_S R$ *и* $\alpha(1_R) = 0$, *то* $\alpha = 0$.

Доказательство. Условия 1) – 6) соответствуют условиям а) – е) предложения 2.7. Условие 7) эквивалентно 5).

Следствие 3.4. *1) Всякое T-кольцо есть левое и правое E-кольцо.*
2) Факторкольцо T-кольца является T-кольцом.

Доказательство. 1) По предложению 3.2, $R \otimes_S R_0 = R_0 \otimes_S R = 0$. Считая R_0 и R правыми S-модулями, имеем $Hom_S(R_0, R) \approx \approx Hom_S(R_0, Hom_R(R, R)) \approx Hom_R(R_0 \otimes_S R, R) = 0$ и R – правое E-кольцо по предложению 3.3. Левый случай получается аналогично.

2) Пусть K – идеал кольца R, $\chi : R \to R/K$ – канонический гомоморфизм. Имеется в виду, что R/K – T-кольцо относительно гомоморфизма $\chi e : S \to R/K$. По предложению 3.2, $R \otimes_S R/e(S) = 0$. Из $(R/K)/(\chi e)S \cong R/(e(S) + K)$ выводим $R/K \otimes_S (R/K)/(\chi e)S = 0$ и R/K – T-кольцо, ввиду предложения 3.2. Следствие доказано.

Предложение 3.5. *Пусть $e : S \to R$ – центральный гомоморфизм и R – E-кольцо. Тогда R – коммутативное кольцо.*

Доказательство. Для элемента $a \in R$ обозначим через ρ_a эндоморфизм правого умножения кольца R на a, $\rho_a(x) = xa$, $x \in R$. Для любых $x \in R$, $s \in S$ имеем $\rho_a(xs) = (xs)a = (xa)s = \rho_a(x)s$. Значит, $\rho_a \in End_S R$. По предложению 3.3, $\rho_a(x) = \rho_a(1_R)x, x \in R$, откуда $xa = \rho_a(x) = \rho_a(1_R)x = ax$.

Предложение 3.6. *1) Пусть A – E-модуль. Тогда $R/AnnA$ – E-кольцо, где $AnnA$ – аннулятор R-модуля A.*

2) Если A – T-модуль, то $R/AnnA$ – левое E-кольцо.

Доказательство. Подразумевается, что $R/AnnA$ – E-кольцо относительно гомоморфизма χe, где $\chi : R \to R/AnnA$ – канонический гомоморфизм. Положим $\overline{R} = R/AnnA$.

1) Возьмем элементы $a \in A$ и $\alpha \in End_S \overline{R}$. Определим отображение $\varphi : R \to A$ как $\varphi(x) = a\alpha(\overline{x})$, где $x \in R$, $\overline{x} = x + AnnA$. Проверим, что φ – S-гомоморфизм. Для $x, y \in R, s \in S$ имеем $\varphi(x + y) = = a\alpha(\overline{x + y}) = a\alpha(\overline{x} + \overline{y}) = a\alpha(\overline{x}) + a\alpha(\overline{y}) = \varphi(x) + \varphi(y)$ и $\varphi(xs) = = a\alpha(\overline{xs}) = a\alpha(\overline{x}s) = a\alpha(\overline{x})s = \varphi(x)s$.

Можно заключить, что $\varphi(x) = \varphi(1_R)x, x \in R$ (предложение 2.7,e). Таким образом, $a\alpha(\overline{x}) = \varphi(1_R)x = a\alpha(\overline{1_R}) = a\alpha(\overline{1_R})\overline{x}$ и $a(\alpha(\overline{x}) - -\alpha(\overline{1_R})\overline{x}) = 0$. Откуда $\alpha(\overline{x}) - \alpha(\overline{1})\overline{x} = 0$, $\alpha(\overline{x}) = \alpha(\overline{1_R})\overline{x}$ для каждого $\overline{x} \in \overline{R}$. По предложению 3.3, $\overline{R}$ – E-кольцо.

2) Обозначим через B левый R-модуль $End_Z A$, где $(r\alpha)a = \alpha(ar)$ для $r \in R$, $\alpha \in End_Z A$, $a \in A$. $End_Z A$ является также левым притягивающим S-модулем. Поскольку A – T-модуль, то $A \otimes_S R_0 = 0$ (предложение 2.2), откуда $Hom_S(R_0, Hom_Z(A, A)) \approx Hom_Z(A \otimes_S R_0, A) = = 0$ и $End_Z A$ – левый $E(R)$-модуль (предложение 2.7). По левому аналогу утверждения 1) $R/AnnB$ – левое E-кольцо. Достаточно показать, что $AnnA = AnnB$. Пусть $r \in AnnA$, $\alpha \in End_Z A$. Тогда

$(r\alpha)a = \alpha(ar) = 0$ для всех $a \in A$, откуда $r\alpha = 0$ и $r \in AnnB$. Наоборот, если $r \in AnnB$, то $r\varepsilon = 0$ (ε – тождественный автоморфизм модуля A), и поэтому $0 = (r\varepsilon)a = \varepsilon(ar) = ar$ для любого $a \in A$. Следовательно, $r \in AnnA$. Предложение доказано.

Если e – центральный гомоморфизм, то правые и левые S-модульные гомоморфизмы $R_0 \to R$ – это одно и то же. На основании предложения 3.3, п.5 заключаем, что в данном случае нет различия между правыми и левыми E-кольцами. В частности, если e – центральный гомоморфизм, то в предложении 3.6, п.2 χe – также центральный и, значит, $R/AnnA$ – правое E-кольцо.

Предложение 3.7. *Пусть R – E-кольцо относительно $e : S \to R$ и γ – эндоморфизм кольца R, тождественный на $e(S)$. Тогда γ – тождественный автоморфизм кольца R.*

Доказательство. Для $x \in R$ и $s \in S$ имеем $\gamma(xs) = \gamma(xe(s)) = \gamma(x)\gamma(e(s)) = \gamma(x)e(s) = \gamma(x)s$. Значит, γ – S-модульный эндоморфизм. Так как R – $E(R)$-модуль, то γ будет эндоморфизмом R-модулей. Итак, $\gamma(x)r = \gamma(xr) = \gamma(x)\gamma(r)$ для всех $x, r \in R$. При $x = 1_R$ получаем $\gamma(r) = r$.

Остановимся кратко на строении R-R-бимодулей $R \otimes_S R$ и $Hom_S(R, R)$ в предположении, что дан гомоморфизм $e : S \to R$. Информация об этих бимодулях важна для ряда вопросов, касающихся T-модулей и E-модулей. Из рассмотрений, проведенных в разд.1, видно, что $R \otimes_S R$ как левый R-модуль равен прямой сумме двух модулей, $R \otimes_S R = P \oplus Q$. Здесь $P = \{x \otimes 1 | x \in R\}$, а Q порождается всеми разностями $x \otimes y - xy \otimes 1$, $x, y \in R$. При этом $x \otimes y = (xy \otimes 1) + (x \otimes y - xy \otimes 1)$. Имеем также изоморфизмы левых R-модулей $P \approx R$, $x \otimes 1 \to x$ и $Q \cong R \otimes_S R_0$, $x \otimes y - xy \otimes 1 \to x \otimes (y + S)$. Таким образом, $R \otimes_S R \approx R \oplus (R \otimes_S R_0)$ как левые R-модули при соответствии $x \otimes y \to xy + x \otimes (y + S)$.

Из разд.1 видно, что как левый R-модуль, $Hom_S(R, R) = E \oplus H$, где $E = Hom_R(R, R)$, а $H = \{\alpha \in Hom_S(R, R) | \alpha(1) = 0\}$. Последний модуль можно отождествить с $Hom_S(R_0, R)$, а $Hom_R(R, R)$ – с R. Таким образом, $Hom_S(R, R) \approx R \oplus Hom_S(R_0, R)$, $\alpha \to \alpha(1) + \overline{\alpha}$, где $\overline{\alpha}(\overline{x}) = \alpha(x) - \alpha(1)x$ для $\overline{x} = x + e(S) \in R_0$. Симметричные факты верны для правых R-модулей $R \otimes_S R$ и $Hom_S(R, R)$.

Эквивалентность утверждений 1) – 3), 7) предложения 3.8 установил Силвер [8] в других терминах. Она может быть также выведена из уже полученных здесь результатов. Мы приводим эти утверждения для полноты изложения. Они показывают место T-колец по отношению к T-модулям и E-модулям.

Предложение 3.8. *Для гомоморфизма $e : S \to R$ равносильны следующие утверждения:*

1) R – T-кольцо;

2) любой R-модуль является T-модулем;

3) любой R-модуль является E-модулем;

4) R-модуль $R \otimes_S R$ – E-модуль;

5) R-модуль $R_0 \otimes_S R$ – E-модуль;

6) левые аналоги утверждений 2) – 5);

7) e – эпиморфизм в категории колец.

Доказательство. Утверждения 1) – 3), 7) эквивалентны [8]. Импликация 3) $\Rightarrow$ 4) справедлива всегда. Модуль $R_0 \otimes_S R$ изоморфен прямому слагаемому модуля $R \otimes_S R$ (замечание перед предложением), поэтому верно 4) $\Rightarrow$ 5).

5) $\Rightarrow$ 1). Допустим, что R – не T-кольцо. Тогда $R_0 \otimes_S R \neq 0$ (предложение 3.2). Докажем, что R-модуль $R_0 \otimes_S R$ не может быть E-модулем, что приведет к противоречию. Для этого достаточно установить, что $Hom_S(R_0, R_0 \otimes_S R) \neq 0$ (предложение 2.7). Рассмотрим отображение $\varphi : R_0 \to R_0 \otimes_S R$, $\overline{x} \to \overline{x} \otimes 1$, $\overline{x} \in R_0$. Понятно, что φ сохраняет сумму. Если $\overline{x} \in R_0$, $s \in S$, то $\varphi(\overline{x}s) = \overline{x}s \otimes 1 = \overline{x} \otimes s \cdot 1 = \overline{x} \otimes e(s) = \overline{x} \otimes 1 \cdot s = (\overline{x} \otimes 1)s = \varphi(\overline{x})s$, т. е. φ – гомоморфизм S-модулей. Так как $R_0 \otimes_S R \neq 0$, то $\overline{x} \otimes y = (\overline{x} \otimes 1)y \neq 0$ для каких-то $\overline{x} \in R_0$, $y \in R$. Следовательно, $\varphi(\overline{x}) = \overline{x} \otimes 1 \neq 0$ и $\varphi \neq 0$.

Левые аналоги всех импликаций доказываются аналогично. Так, в 5) нужно взять левый R-модуль $R \otimes_S R_0$, а в 5) $\Rightarrow$ 1) – гомоморфизм $R_0 \to R \otimes_S R_0$, $\overline{x} \to 1 \otimes \overline{x}$. Эквивалентность утверждений 1) – 6), а значит и 1) – 7), установлена.

4. $T(S)$-модули и $E(S)$-модули

Пусть дан гомоморфизм колец $e : S \to R$ и S-модуль A (на A нет структуры R-модуля). Предположим, что на A можно задать структуру R-модуля так, что A становится притягивающим S-модулем и $T(R)$-модулем относительно e. Такой S-модуль A назовем $T(S)$-модулем. Поскольку A – притягивающий S-модуль, то $ae(s) = as$ для любых $a \in A$, $s \in S$. Следовательно, известно заранее, как действуют элементы подкольца $e(S)$ кольца R на A. Будем использовать гомоморфизмы S-модулей ω_S, $1 \otimes e$ и ω из следствия 2.3.

Предложение 4.1. *Для S-модуля A эквивалентны условия:*

1) $1 \otimes e$ – изоморфизм;

2) ω – изоморфизм;

3) $A \otimes_S R_0 = 0$ и ω либо $1 \otimes e$ – мономорфизм;

4) A – $T(S)$-модуль.

Если эти условия выполнены, то структура R-модуля на A такая, что A – притягивающий S-модуль относительно e, единственна.

Доказательство. Из $\omega = (1 \otimes e)\omega_S^{-1}$, вытекает эквивалентность условий 1) и 2), а из следствия 2.3 – условий 2) и 3). Импликация 4) $\Rightarrow$ 2) содержится в предложении 2.2.

2) $\Rightarrow$ 4). Принимая во внимание, что $A \otimes_S R$ – R-модуль и полагая $ar = \omega^{-1}(\omega(a)r)$ для $a \in A$ и $r \in R$, получаем структуру R-модуля на A. Понятно, что $ar = \omega^{-1}(a \otimes r)$. Пусть $a \in A$, $s \in S$. Тогда $ae(s) = \omega^{-1}(a \otimes e(s)) = \omega_S(1 \otimes e)^{-1}(a \otimes e(s)) = \omega_S(a \otimes s) = as$. Таким образом, $as = ae(s)$ и A – притягивающий S-модуль. По предложению 2.2, A – $T(R)$-модуль и, значит, $T(S)$-модуль. Эквивалентность условий 1) – 4) установлена.

Считаем теперь, что условия 1) – 4) выполнены и на A существует еще одна структура модуля над кольцом R с внешним умножением $\circ$. При этом A – притягивающий S-модуль относительно e, т. е. $as = a \circ e(s)$, где $a \in A, s \in S$. Поскольку также $as = ae(s)$, то $ae(s) = a \circ e(s)$ для всех $a \in A, s \in S$. Требуется показать, что $ar = a \circ r$ для всех $a \in A$ и $r \in R$.

В доказательстве п.2 предложения 3.6 замечено, что левый R-модуль $Hom_Z(A, A)$ является $E(R)$-модулем. Для элемента $x \in R$ через α_x обозначим аддитивный гомоморфизм $A \to A$, $\alpha_x(a) = a \circ x$, $a \in A$. Теперь определим аддитивный гомоморфизм $\phi : R \to Hom_Z(A, A)$ посредством формулы $\phi(x) = \alpha_x$, $x \in R$. Возьмем элементы $s \in S$, $r \in R$, $a \in A$. Вычислим $\phi(sx)(a) = \alpha_{sx}(a) = a \circ (sx) = a \circ (e(s)x) = (a \circ e(s)) \circ x = (as) \circ x$. С другой стороны, $s\phi(x)(a) = (s\alpha_x)(a) = \alpha_x(as) = (as) \circ x$. Итак, $\phi(sx) = s\phi(x)$ и ϕ – гомоморфизм левых S-модулей. Но $Hom_Z(A, A)$ – $E(R)$-модуль, поэтому ϕ – R-модульный гомоморфизм, т. е. $\phi(rx) = r\phi(x)$ для всех $r, x \in R$. Следовательно, для любого $a \in A$ имеем $\alpha_{rx}(a) = r\alpha_x(a)$. Здесь $\alpha_{rx}(a) = a \circ (rx)$, а $r\alpha_x(a) = \alpha_x(ar) = ar \circ x$. При $x = 1$ находим $a \circ r = ar$, что означает совпадение двух R-модульных структур на A.

Следствие 4.2. *Если A – $T(R)$-модуль в обычном смысле, то на A имеется лишь одна R-модульная структура.*

Для данного гомоморфизма колец $e : S \to R$ можно сформулировать задачу описания класса всех $T(S)$-модулей относительно e. Этой задаче можно придать более универсальную форму. Обозначим через $\mathcal{T}(S)$ полную подкатегорию S-модулей, являющихся $T(S)$-модулями относительно e. По предложению 4.1, существует вложение $\mathcal{T}(S)$ в класс всех R-модулей. В силу предложения 2.10 всякий S-гомоморфизм $A \to B$, где $A, B \in \mathcal{T}(S)$, является R-гомоморфизмом. Поэтому $\mathcal{T}(S)$ определяет полную подкатегорию категории R-модулей, состоящую из $T(R)$-модулей. Обозначим ее $\mathcal{T}(R)$. По существу $\mathcal{T}(S)$ и $\mathcal{T}(R)$ идентичны. Запишем теперь следующую задачу.

Дано кольцо S. Описать всевозможные подкатегории $\mathcal{T}(S)$. Говоря точнее, для каких полных подкатегорий $\mathcal{T}$ категории S-модулей существуют кольцо R и гомоморфизм $e : S \to R$ такие, что $\mathcal{T} = \mathcal{T}(S)$?

Этой задачи касается следующая теорема, показывающая, что категория $\mathcal{T}(S)$ при некоторых условиях определяет кольцо R с точностью до изоморфизма.

Пусть $e : S \to R$ и $h : S \to C$ – гомоморфизмы колец. Обозначим через $\mathcal{T}_e(S)$ $(\mathcal{T}_h(S))$ категорию $T(S)$-модулей относительно e (относительно h).

Теорема 4.3. *Предположим, что R является T-кольцом относительно e, C является T-кольцом относительно h и $\mathcal{T}_e(S) = \mathcal{T}_h(S)$. Тогда кольца R и C изоморфны.*

Доказательство. Как и раньше, R и C считаем S-модулями, где $rs = re(s)$, а $cs = ch(s)$ для $r \in R$, $c \in C$, $s \in S$. То, что R является T-кольцом относительно e, равносильно $R \in \mathcal{T}_e(S)$, а то, что C – T-кольцо относительно h, равносильно $C \in \mathcal{T}_h(S)$. Поскольку $\mathcal{T}_e(S) = \mathcal{T}_h(S)$, то $R \in \mathcal{T}_h(S)$, а $C \in \mathcal{T}_e(S)$. Следовательно, на R имеется структура C-модуля $\circ$, причем R – $T(C)$-модуль, а как S-модуль R является притягивающим относительно h. Последнее означает, что $xs = x \circ h(s)$ для любых $x \in R$, $s \in S$. Поскольку также $xs = xe(s)$, то $xe(s) = x \circ h(s)$. Соответственно на C имеется структура $\circ$ R-модуля, причем C – $T(R)$-модуль и притягивающий как S-модуль относительно e. Отсюда получается, что $ch(s) = c \circ e(s)$ при всех $c \in C$ и $s \in S$.

Для элемента $a \in R$ пусть $\alpha_a : R \to R$ – эндоморфизм левого умножения на a. Тогда α_a – S-модульный и, значит, C-модульный эндоморфизм (предложение 2.10). Так что $\alpha_a(x \circ c) = \alpha_a(x) \circ c$, откуда $a(x \circ c) = (ax) \circ c$ для любых $a, x \in R$, $c \in C$.

Определим групповой гомоморфизм $\gamma : C \to R$, полагая $\gamma(c) = 1_R \circ c$, $c \in C$. Для произвольных элементов $c, d \in C$ вычисляем $\gamma(cd) = 1_R \circ (cd) = (1_R \circ c) \circ d = \gamma(c) \circ d = (\gamma(c) 1_R) \circ d = \gamma(c)(1_R \circ d) = \gamma(c)\gamma(d)$. Следовательно, γ –кольцевой гомоморфизм. Дополнительно, γ – гомоморфизм S-модулей. Действительно, если $c \in C$,

$s \in S$, то $\gamma(cs) = 1_R \circ (cs) = 1_R \circ (ch(s)) = (1_R \circ c) \circ h(s) = (1_R \circ c)e(s) = \gamma(c)e(s) = \gamma(c)s$ и $\gamma(cs) = \gamma(c)s$.

Меняя местами кольца R и C в проведенном рассуждении, можно построить гомоморфизм колец и S-модулей $\delta : R \to C$. Композиция $\gamma\delta$ будет S-модульным эндоморфизмом $R \to R$. Ввиду $R \in \mathcal{T}_e(S)$ $\gamma\delta$ – R-модульный эндоморфизм (предложение 2.10), откуда $\gamma\delta(x) = \gamma\delta(1_R)x$ для всех $x \in R$. Учитывая, что γ и δ – кольцевые гомоморфизмы, имеем $\gamma\delta(1_R)x = x$. Таким образом, $\gamma\delta(x) = x$ и $\gamma\delta$ – тождественный автоморфизм кольца R. Аналогично $\delta\gamma$ – тождественный автоморфизм кольца C. Получили, что γ и δ – взаимно обратные изоморфизмы и $R \cong C$ как кольца. Теорема доказана.

Пусть снова имеем гомоморфизм колец $e : S \to R$ и S-модуль A. Предположим, что на A можно задать структуру R-модуля так, что A становится притягивающим S-модулем и $E(R)$-модулем относительно e. В таком случае S-модуль A называем $E(S)$-модулем.

Обозначим через $tr_R A$ след R в A как S-модуля, т. е. сумму образов всех S-гомоморфизмов $R \to A$. Гомоморфизмы π_S, $\dot{e}$ и π ниже взяты из следствия 2.8.

Предложение 4.4. *Эквивалентны следующие условия:* А-мод

1) $\dot{e}$ – изоморфизм;

2) π – изоморфизм;

3) $Hom_S(R_0, A) = 0$ и $tr_R A = A$;

4) A – $E(S)$-модуль.

Если эти условия выполнены, то структура R-модуля на A такая, что A – притягивающий S-модуль относительно e, единственна.

Доказательство. Справедливость 1) $\Rightarrow$ 2) вытекает из равенства $\pi = \pi_S \dot{e}$.

2) $\Rightarrow$ 3). По следствию 2.8, $Hom_S(R_0, A) = 0$. Из $\pi(\varphi) = \varphi(1)$, $\varphi \in Hom_S(R, A)$ заключаем $tr_R A = A$.

3) $\Rightarrow$ 1). По следствию 2.8, $\dot{e}$ – мономорфизм. Из $tr_R A = A$ выводим, что для каждого $a \in A$ существуют $\varphi_i \in Hom_S(R, A)$ и $x_i \in R$ $(i = 1, \dots, n)$ со свойством $a = \varphi_1(x_1) + \dots + \varphi_n(x_n)$. Полагая $\psi(y) = \varphi_1(x_1 y) + \dots + \varphi_n(x_n y)$ для каждого $y \in R$, приходим к S-гомоморфизму $R \to A$, причем $\psi(1) = a$. Следовательно, π и $\dot{e}$ – эпиморфизмы. Таким образом, $\dot{e}$ – изоморфизм.

Если дано 4), то согласно предложению 2.7 имеем 2).

2) $\Rightarrow$ 4). С помощью изоморфизма $\pi : Hom_S(R, A) \to A$ следующим образом задаем на A структуру R-модуля. Для элементов $a \in A$

и $r \in R$ полагаем $ar = \pi(\pi^{-1}(a)r)$. При этом мы учитываем то обстоятельство, что $Hom_S(R, A)$ – R-модуль, где $(\varphi r)x = \varphi(rx)$ для $\varphi \in Hom_S(R,A)$ и $r, x \in R$. Убедимся, что A – притягивающий S-модуль относительно e. Для произвольных элементов $a \in A$ и $s \in S$ вычисляем $ae(s) = \pi(\pi^{-1}(a)e(s)) = \pi_S e^{*}(\pi^{-1}(a)e(s)) = \pi_S((\pi^{-1}(a)e(s))e) = (\pi^{-1}(a)e(s))e(1_S) = (\pi^{-1}(a)e(s))(1_R) = \pi^{-1}(a)(e(s))$.

Пусть $\pi^{-1}(a) = \varphi$, где $\varphi \in Hom_S(R, A)$. Тогда $a = \pi(\varphi) = \varphi(1_R)$. Продолжая вычислять дальше, находим $\pi^{-1}(a)(e(s)) = \varphi(e(s)) = (\varphi e)s = (\varphi e)(1_S s) = (\varphi e)(1_S)s = \varphi(1_R)s = as$. Итак, $as = ae(s)$ и A – притягивающий S-модуль. Так как π – изоморфизм, то, согласно предложению 2.7, A – $E(R)$-модуль и потому – $E(S)$-модуль. Это завершает проверку эквивалентности условий 1) – 4).

Предположим, что условия 1) – 4) выполнены, однако на A существует еще одна R-модульная структура $\circ$, для которой $as = a \circ e(s)$, где $a \in A$, $s \in S$.

Поскольку также $as = ae(s)$, то $ae(s) = a \circ e(s)$. Зафиксируем элемент $a \in A$ и зададим отображения $\varphi_a, \psi_a : R \to A$, полагая $\varphi_a(x) = ax$ и $\psi_a(x) = a \circ x$, $x \in R$. Ясно, что они сохраняют сумму. Для $x \in R$, $s \in S$ имеем $\varphi_a(xs) = a(xs) = a(xe(s)) = (ax)e(s) = (ax)s = \varphi_a(x)s$ и $\psi_a(xs) = a \circ (xs) = a \circ (xe(s)) = (a \circ x) \circ e(s) = \psi_a(x) \circ e(s) = \psi_a(x)e(s) = \psi_a(x)s$. Нашли, что $\varphi_a, \psi_a \in Hom_S(R, A)$. Учитывая инъективность π, из $\pi(\varphi_a - \psi_a) = (\varphi_a - \psi_a)(1) = a \cdot 1 - a \circ 1 = 0$ выводим $\varphi_a = \psi_a$. Это означает, что $ar = a \circ r$ для всех $a \in A$ и $r \in R$, что и требовалось. Предложение доказано.

Рассматривая гомоморфизм $e : S \to R$, обозначим через $\mathcal{E}(S)$ полную подкатегорию S-модулей, являющихся $E(S)$-модулями относительно e. Ввиду предложения 4.4 существует вложение $\mathcal{E}(S)$ в класс всех R-модулей. По предложению 2.10, всякий S-гомоморфизм $A \to B$, $A, B \in \mathcal{E}(S)$ будет R-гомоморфизмом. Поэтому $\mathcal{E}(S)$ определяет полную подкатегорию категории R-модулей, состоящую из $E(R)$-модулей. Обозначим ее $\mathcal{E}(R)$. Собственно, $\mathcal{E}(S)$ и $\mathcal{E}(R)$ можно не различать. Возникает такая задача.

Дано кольцо S. Описать все подкатегории $\mathcal{E}(S)$. Имеется в виду следующее. Если $\mathcal{E}$ – полная подкатегория категории S-модулей, то когда существуют кольцо R и гомоморфизм $e : S \to R$ такие, что $\mathcal{E} = \mathcal{E}(S)$? Для кольца S, равного Z, т. е. для E-модулей в обычном смысле, подобная задача сформулирована в [3] как одна из открытых проблем. В [3], а также в [2] получены различные результаты в направлении решения этой проблемы. Оказывается, категория $\mathcal{E}(S)$ определяет кольцо R с точностью до изоморфизма при некоторых дополнительных условиях.

Пусть $e : S \to R$ и $h : S \to C$ – гомоморфизмы колец. Обозначим через $\mathcal{E}_e(S)$ ($\mathcal{E}_h(S)$) категорию $E(S)$-модулей относительно e (относительно h).

Теорема 4.5. *Пусть R – E-кольцо относительно e, а C – E-кольцо относительно h и $\mathcal{E}_e(S) = \mathcal{E}_h(S)$. Тогда $R \cong C$ как кольца.*

Доказательство. Так же, как в теореме 4.3, R и C считаем S-модулями. Поскольку R и C - E-кольца, то $R \in \mathcal{E}_e(S)$, а $C \in \mathcal{E}_h(S)$. Значит, $R \in \mathcal{E}_h(S)$, а $C \in \mathcal{E}_e(S)$. Следовательно, на R имеется структура C-модуля $\circ$, причем R – $E(C)$-модуль и притягивающий S-модуль относительно h. Откуда $xe(s) = x \circ h(s)$, где $x \in R$, $s \in S$. Симметрично на C существует структура $\circ$ R-модуля такая, что C – $E(R)$-модуль, притягивающий S-модуль относительно e и $ch(s) = c \circ e(s)$, где $c \in C$, $s \in S$. Далее можно дословно повторить доказательство теоремы 4.3, при этом также используется предложение 2.10.

Литература

[1] Schultz P. *The endomorphism ring of the additive group of a ring*// J. Aust. Math. Soc. 1973. V.15. P.60–69.

[2] Bowshell R. A., Schultz P. *Unital rings whose additive endomorphisms commute*// Math. Ann. 1977. V.228. P.197–214.

[3] Pierse R. S. *E-modules*// Contem. Math. 1989. V.87. P.221–240.

[4] Крылов П. А. *Абелевы группы без кручения как модули над своими кольцами эндоморфизмов*// Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1996. Вып. 13,14. С.77–104.

[5] Крылов П. А., Классен Е. Д. *Центр кольца эндоморфизмов расщепляющейся смешанной абелевой группы*// Сиб. мат. журнал. 1999. Т.40. №5. С.1074–1085.

[6] Приходовский М. А. *Обобщенные E-модули и E-кольца*// Универсальная алгебра и ее приложения: Тез. сообщ. междунар. семинара. Волгоград, 1999. С.55–56.

[7] Картан А., Эйленберг С. *Гомологическая алгебра.* М.: ИЛ, 1960.

[8] Silver L. *Noncommutative localizations and applications*// J.Algebra. 1967. V.7. P.44–76.