УДК 519.254/.644/.652

# МОДИФИКАЦИЯ ЭКСТРАПОЛЯЦИОННОГО МЕТОДА РИЧАРДСОНА

**Приходовский М.А.**

*ГОУ ВПО «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники», Томск, e-mail: prihod1@yandex.ru, prihod1@main.tusur.ru*

Предлагается новый вариант экстраполяционного численного метода Ричардсона. Предлагаемый метод отличается от исходного метода тем, что последовательность значений, соответствующих разному шагу, анализируется вероятностным способом. Вместо выбора одной подпоследовательности и нахождения её предела, как в методе Ричардсона, выбирается несколько непересекающихся подпоследовательностей, предел каждой из них ассоциируется с одним из значений случайной величины, и вычисляется математическое ожидание этой случайной величины. Это повышает достоверность результата, находимого численным методом. Доказано, что при n > 2, достигается точность больше, чем при n равном 2. Предложенная модификация может быть применена для более точного решения различных физических, в том числе астрономических задач, связанных с движением спутников и астероидов.

**Ключевые слова: экстраполяция, приближённые вычисления, математическое ожидание, метод Ромберга, метод Ричардсона**

# MODIFICATION OF RICHARDSON EXTRAPOLATION METHOD

**Prikhodovsky M.A.**

*Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Tomsk, e-mail: prihod1@yandex.ru, prihod1@main.tusur.ru*

A new version of the extrapolation of a numerical method of Richardson, characterized in that the sequence of values corresponding to a different step, analyzed the probabilistic method. Instead of selecting a subsequence and finding its limit, as in the method of Richardson, select multiple non-overlapping sub-sequences, the limit of each of them is associated with a random variable, and calculated the expectation of this random variable. This increases the accuracy of the results, the found is a numerical method. It is proved that for n greater than 2, an accuracy greater than for n = 2. The proposed modification can be applied to better address the various individuals, including astronomical problems associated with the movement of the satellites and asteroids.

**Keywords: extrapolation, approximate calculation, the expectation, the method of Romberg, Richardson method**

При решении тех или иных физических задач численным методом, производится конечная серия вычислений с шагом $h$. Естественно, что при уменьшении шага $h$ получается более точный результат. Пусть результат, полученный численным методом в некоторой требуемой точке, обозначен $T(h)$. Наилучший результат был бы достигнут при $h = 0$. Однако выполнить такую серию вычислений физически невозможно, так как при этом получилось бы бесконечное число шагов. Тем не менее, значение $T(0)$ теоретически может быть найдено. Существует класс экстраполяционных методов, начальная идея которых принадлежит Ричардсону [1]. Для вычисления определённых интегралов применяется метод Ромберга, являющийся адаптацией метода Ричардсона для этого класса задач [2, 3]. Метод Ричардсона активно используется и в астрономии для численного определения орбит небесных тел [4]. Технология экстраполяционных методов состоит в следующем. Вычислив $T(h)$ для нескольких значений $h$, можно приближённо найти функцию $T(h)$ (например, как интерполяционный многочлен Лагранжа) и затем вычислить предел $\lim\limits_{h\to 0} T(h)$, т.е. фактически, значение $T(0)$, которое является гораздо более точным по сравнению с любым значением, полученным ранее при любом шаге $h$, так как соответствует «бесконечной» серии вычислений с нулевым шагом. Экстраполяция по $n$ означает, что рассматривается предел $T(h/n)$ при $n \to \infty$. Поэтому метод называется экстраполяционным.

Одной из модификаций данного метода является экстраполяция при половинном делении шага на каждом последующем этапе. Вычислив $T(h)$, затем поделим величину шага пополам и, выполнив 2 последовательных вычисления, найдём $T\left(\frac{h}{2}\right)$, затем аналогично каждый отрезок делится ещё на две части, шаг становится $\frac{h}{4}$, выполняется 4 последовательных вычисления, тем самым находится $T\left(\frac{h}{4}\right)$, затем таким же способом $T\left(\frac{h}{8}\right)$ и так далее. С каждым разом значение всё ближе к точному значению искомой функции в требуемой точке. Если таким образом измельчать разбиение множество раз, получится последовательность

$$\left\{T(h),T\left(\frac{h}{2}\right),T\left(\frac{h}{4}\right),T\left(\frac{h}{8}\right),...\right\}.$$

Пусть через $I$ обозначен точный результат, полученный аналитическим способом. Очевидно, что

$$I=\lim_{j\to\infty}T\left(\frac{h}{2^j}\right).$$

Обозначим для удобства работы с последовательностями,

$$a_n=T\left(\frac{h}{n}\right).$$

Фактически, при последовательном половинном делении шага в методе Ричардсона, рассматривается не вся последовательность $\{a_1,a_2,a_3,...\}$, а лишь одна её подпоследовательность $\{a_1,a_2,a_{2^2},a_{2^3},...\}$.

Серии вычислений методом Ричардсона можно представить с помощью схемы (рис. 1).

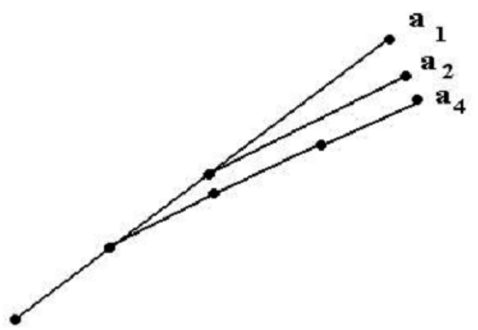


*Рис. 1*

Эта последовательность обладает свойством: разности $I-T\left(\frac{h}{2^j}\right)$ между её элементами и предельным значением близки к некоторой бесконечной убывающей геометрической прогрессии. Почему это именно так, становится понятно из следующих рассуждений. Если точность исходного численного метода без экстраполяции была такова, что порешность пропорцональна $h^m$, то погрешность с каждым новым шагом уменьшается в $2^m$ раз, а именно $\Delta_0=\alpha h^m$, $\Delta_1=\alpha\left(\frac{h}{2}\right)^m$, $\Delta_2=\alpha\left(\frac{h}{4}\right)^m$, ... Таким образом, если каждый из знаменателей здесь имеет вид $(2^j)^m$, что равно $(2^m)^j$, то погрешность близка к убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=2^{-m}$. В частности, если точность исходного метода, к которому применяют асимптотический переход, есть $O(h^2)$, то погрешность

$$\Delta_i=I-T\left(\frac{h}{2^j}\right)$$

будет уменьшаться приблизительно в 4 раза при каждом следующем половинном делении шага, если $O(h^3)$ то в 8 раз.

Остановимся подробнее на методе Ромберга. Если вычислить определённый интеграл с шагом с шагом $2h$ (обозначим полученный результат $T(2h)$), затем удвоить количество узлов и вычислить с шагом $h$ (обозначим результат $T(h)$), то получим более точное значение. Причём если отклонение от точного значения ведёт себя как убывающая геометрическая прогрессия, то

$$\frac{T(h)-I}{T(2h)-I}=\frac{1}{2^m}.$$

Из этого следует, что

$$2^m(T(h)-I)=T(2h)-I,$$

а значит, в качестве асимптотического значения принимается следующее:

$$I=\frac{2^mT(h)-T(2h)}{2^m-1}.$$

Более точное приближение получится, если удвоить количество узлов не один, а несколько раз. Применяются следующие квадратурные формулы:

$$A_i=\frac{1}{2^{i+1}}\left(f(0)+2\sum_{j=1}^{2^i-1}f\left(\frac{j}{2^i}\right)+f(1)\right).$$

Затем находятся элементы $\frac{2^mA_{i+1}-A_i}{2^m-1}$. При этом требование на гладкость функций следующее: предполагается, что если число узлов удваивается $n$ раз, то существует непрерывная производная $f^{(2n)}(x)$.

Если погрешность есть функция вида $\alpha h^m$, то при вычислении последовательности значений, их отклонение от точного результата есть геометрическая прогрессия со знаменателем $2^{-m}$. Так, при применении метода трапеций, погрешность имеет порядок 2 относительно $h$, соответственно, при каждом последующем половинном делении и удвоении количества узлов, результат в 4 раза ближе к точному значению интеграла. Строение последовательности $I-T\left(\frac{h}{2^i}\right)$ близко к геометрической прогрессии, именно этим фактом и пользуются при применении метода Ромберга для экстраполяции.

**Постановка проблемы**

Вообще, если бы погрешность $I-T(h)$ в точности совпадала степенной функцией $\alpha h^m$, то было бы достаточно вычислить величину $\alpha$ из соотношения

$$\left(I-T(h_1)\right)-\left(I-T(h_2)\right)=\alpha\left(h_1^m-h_2^m\right),$$

получили бы

$$\alpha=\frac{T(h_2)-T(h_1)}{h_1^m-h_2^m}$$

и тогда можно было бы принять в качестве значения интеграла величину

$$I=T(h_i)+\alpha h_i^m .$$

Однако проблема в том, что погрешность $I-T(h)$ не совпадает с $\alpha h^m$, величина $\alpha$ зависит от *h*, не является постоянной, то есть

$$\alpha=\frac{T(h_2)-T(h_1)}{h_1^m-h_2^m}$$

зависит от того, разбиения с какими шагами $h_1$ и $h_2$ сопоставляются. В связи с этим, вообще говоря, величины, рассматриваемые в методе Ромберга, также не образуют в точности геометрическую прогрессию, а значит, применение формул геометрической прогрессии при этом приводит к некоторой дополнительной погрешности, связанной с вариациями величины $\alpha$. Точная геометрическая прогрессия получается лишь в том случае, если исходная функция является многочленом. Для тригонометрических функций, к примеру, получаем такие значения:

$$A_2/A_3=4,03134\quad A_3/A_4=4,00774$$
$$A_4/A_5=4,00193$$
$$A_5/A_6=4,00048\quad A_6/A_7=4,00012$$
$$A_7/A_8=4,00003$$
$$A_8/A_9=4,00000\quad A_9/A_{10}=4,00007$$
$$A_{10}/A_{11}=3,99983$$
$$A_{11}/A_{12}=4,00494\quad A_{12}/A_{13}=3,98931;$$
$$A_{13}/A_{14}=3,96593;$$
$$A_{14}/A_{15}=4,70655;$$

При достаточно большом количестве узлов, например $2^{15}$, на результат начинают сильно влиять ошибки, связанные с вычислительной техникой и ограниченностью разрядной сетки. Выбор оптимального шага и количества узлов, вообще говоря, является одной из открытых проблем.

Изучим подробнее, как может влиять нестационарность $\alpha$ на результат. Обозначим максимальное отклонение величины $\frac{I-T(h)}{h^m}$ от величины $\alpha$ через $\varepsilon$, то есть $\frac{I-T(h)}{h^m}$ принимает значения от $\alpha-\varepsilon$ до $\alpha+\varepsilon$. Тогда отношение двух таких величин заключено в границах от $\frac{\alpha-\varepsilon}{\alpha+\varepsilon}$ до $\frac{\alpha+\varepsilon}{\alpha-\varepsilon}$. Таким образом,

$$\frac{T(2h)-I}{T(h)-I}=\delta 2^m,$$

где $\delta\in\left(\frac{\alpha-\varepsilon}{\alpha+\varepsilon},\frac{\alpha+\varepsilon}{\alpha-\varepsilon}\right)$.

Если бы отклонение от точного значения при удвоении числа узлов вело бы себя в точности как геометрическая прогрессия, то было бы $T(h)=I+\Delta$, $T(2h)=I+2^m\Delta$, где через $\Delta$ обозначено отклонение результата, полученного численным методом при шаге *h*, от точного значения, то есть $\Delta=T(h)-I$. То есть, *I* есть значение, получаемое методом Ромберга, в предположении, что $\alpha$ величина постоянная и отклонения от точного значения уменьшаются со скоростью геометрической прогрессии.

Однако в действительности отклонение при предыдущем количестве узлов достигает не $2^m\Delta$, а $\delta 2^m\Delta$, то есть верно отношение

$$\frac{I_2-T(2h)}{I_2-T(h)}=\frac{\Delta\delta 2^m}{\Delta},$$

где через $I_2$ обозначен точный результат. Тогда

$$I_2-T(2h)=\delta 2^m(I_2-T(h)),$$

$$\delta 2^m T(h) - T(2h) = (\delta 2^m - 1) I_2,$$

следовательно,

$$I_2 = \frac{\delta 2^m T(h) - T(2h)}{\delta 2^m - 1}.$$

Далее, выразим $T(h)$ и $T(2h)$ через значение $I$, которое получалось бы при отсутствии вариаций величины $\alpha$, с целью выразить $I_2$ через $I$ и узнать, какая добавка получается из-за вариаций $\alpha$.

$$I_2 = \frac{\delta 2^m T(h) - T(2h)}{\delta 2^m - 1} =$$

$$= \frac{\delta 2^m (I + \Delta) - (I + 2^m \Delta)}{\delta 2^m - 1} =$$

$$= \frac{(\delta 2^m - 1) I + (\delta 2^m \Delta - 2^m \Delta)}{\delta 2^m - 1} =$$

$$I + \Delta \frac{\delta 2^m - 2^m}{\delta 2^m - 1} = I + \Delta \frac{\delta - 1}{\delta - 1/2^m}.$$

Так, например, при использовании в качестве первичного метода трапеций (погрешность порядка $h^2$, $m$=2) при асимптотическом переходе дополнительная погрешность, связанная с нестационарностью $\alpha$, составит $\Delta \frac{\delta - 1}{\delta - 1/4}$.

Если $\varepsilon = 0$ (соответственно, $\delta = 1$) то величина

$$\frac{\delta - 1}{\delta - 1/4} = 0.$$

Однако для реальных задач, где интегрируемая функция отличается от многочлена, величина $\alpha$ зависит от $h$ и не является константой. Поэтому при асимптотическом приближении с помощью формул геометрической прогрессии, нельзя ожидать точного результата, ведь на самом деле исследуемая последовательность отклоняется от прогрессии. В этом заключена некоторая неустранимая погрешность, связанная с самим рассматриваемым методом. Далее ищутся способы возможной минимизации этой погрешности.

**Предлагаемая модификация метода**

В связи со всем сказанным ранее, возникает необходимость усиления достоверности получаемого результата. Для этого может рассматриваться следующая идея: вместо экстраполяции на основе одной лишь только подпоследовательности, получить подобные результаты для серии из нескольких непересекающихся подпоследовательностей. Вообще, для всякого $n \in N$, при разбиении отрезка длины $h$ на n частей, всякий раз получается некоторое значение численного эксперимента, проводимого с шагом $\frac{h}{n}$, то есть существует общая последовательность значений

$$\left\{ T(h), T\left(\frac{h}{2}\right), T\left(\frac{h}{3}\right), \ldots \right\}$$

для всех натуральных чисел. Последовательность, применяемая в методе Ричардсона (и в частности, методе Ромберга) является лишь одной из её подпоследовательностей, а именно, с номерами $\{1, 2, 2^2, 2^3, \ldots\}$. Очевидно, $\{1, 2, 2^2, 2^3, \ldots\}$ не является единственной подпоследовательностью в $N$. В связи с этим закономерен вопрос, получится ли более точное решение при уменьшении шага на каждом этапе не в 2 раза, а в $k$ раз, где $k > 2$. Можно рассматривать подпоследовательность номеров $\{1, k, k^2, k^3, \ldots\}$ в $N$ и соответственно, последовательность результатов, полученных численным методом

$$\left\{ T(h), T\left(\frac{h}{k}\right), T\left(\frac{h}{k^2}\right), \ldots \right\}$$

для различных чисел $k$. Назовём такое $k$ базовым числом. В методах Ричардсона и Ромберга базовое число было равно 2. В общем же случае будет вычисляться предел вида $\lim_{i \to \infty} T\left(\frac{h}{k^i}\right)$. Множество значений, полученных с помощью экстраполяции при различных базовых числах, можно рассматривать как случайную величину, которая, в свою очередь, характеризуется математическим ожиданием и дисперсией. В методе Ричардсона и соответственно, Ромберга, рассматривается лишь одно значение случайной величины. Надёжность и достоверность результата повысится, если вместо одного экспериментально вычисленного значения рассматривать математическое ожидание нескольких найденных значений, рассматриваемых как значения некоторой случайной величины. Можно принимать в качестве результата среднее арифметическое асимптотических значений, полученных при различных базовых числах *k*.

Использование нескольких серий вычислений и поиск среднего арифметического являются способом дополнительного увеличения надёжности. Однако сначала докажем, что даже простая замена 2 на *k* может несколько улучшить результат.

Если бы погрешность при каждом последующем удвоении числа узлов была в точности геометрической прогрессией, то выполнялись бы равенства:

$$T(h) = I + \Delta\,,\ T(kh) = I + k^m\Delta\,,$$

где $\Delta$ – отклонение результата, полученного численным методом при шаге *h*, от точного значения, то есть $\Delta = T(h) - I$. Однако на самом деле, значение $\alpha$ подвержено некоторым вариациям, и максимальное отношение $\frac{\alpha+\varepsilon}{\alpha-\varepsilon}$ было обозначено через $\delta$. Поэтому

$$\frac{I_2 - T(kh)}{I_2 - T(h)} = \frac{\Delta\delta k^m}{\Delta},$$

где $I_2$ точный результат. Тогда

$$I_2 - T(kh) = \delta k^m (I_2 - T(h))\,,$$

$$\delta k^m T(h) - T(kh) = (\delta k^m - 1) I_2\,,$$

следовательно,

$$I_2 = \frac{\delta\cdot k^m T(h) - T(kh)}{\delta\cdot k^m - 1} =$$

$$= \frac{\delta\cdot k^m (I+\Delta) - (I + k^m\Delta)}{\delta\cdot k^m - 1} =$$

$$= \frac{(\delta\cdot k^m - 1)I + (\delta\ k^m\Delta - k^m\Delta)}{\delta\cdot k^m - 1} =$$

$$= I + \Delta\frac{\delta - 1}{\delta - 1/k^m}\,.$$

Если погрешность первичного метода (без асимптотического перехода) порядка $h^2$, то дополнительная погрешность, связанная с нестационарностью $\alpha$, составит

$\Delta\frac{\delta-1}{\delta - 1/k^2}$. На следующем чертеже показан график величины $\left|\frac{\delta-1}{\delta - 1/k^2}\right|$.

При $\delta = 1$ эта величина равна 0, так как в этом случае $\alpha \equiv const$. При $k > 2$ отклонение меньше, а при *k*=2 наибольшее. Таким образом, использование *k* вместо 2 в методе Ромберга несколько лучше нивелирует нестационарность коэффициента $\alpha$, то есть уменьшает влияние отклонения рассматриваемой последовательности от геометрической прогрессии.

Так как при каждом последующем уточнении будет происходить увеличение количества узлов в *k* раз вместо удвоения, то в предлагаемой модификации метода должны использоваться следующие квадратурные формулы

$$A_i = \frac{1}{2}\frac{1}{k^i}\left( f(0) + 2\sum_{j=1}^{k^i-1} f\left(\frac{j}{k^i}\right) + f(1)\right),$$

где для простоты и наглядности записи взят промежуток $[0,1]$. Асимптотические приближения в этом случае находятся по формулам

$$\frac{k^m A_{i+1} - A_i}{k^m - 1}.$$

**Вычислительные эксперименты. Взаимосвязь базового числа *k* и количества шагов *n***

Предлагаемая модификация была проверена на различных задачах, связанных с вычислением определённых интегралов. Данный класс задач является хорошим материалом для отработки и совершенствования численных методов и их различных модификаций, потому что в таком случае известно точное решение, то есть некая эталонная функция, значение которой можно сравнивать с результатами, полученными численным методом. Таким путём можно исследовать сходимость самого метода. Затем разработанные методы могут быть использованы в реальных физических и астрономических задачах, где заранее известного аналитического решения нет.

Если проводится серия вычислений при нескольких значениях *k*, это позволяет вычислить среднее арифметическое. Такой подход повышает надёжность вычислений и исключает некоторые вычислительные ошибки, которые могли бы возникать при рассмотрении только одного базового числа *k*=2.

**Применение к интегралам**

В следующем примере показана разница между значением, вычисленным с помощью модифицированного метода Ричардсона при разных базовых числах, и точным значением, для определённого интеграла от рациональной дроби

$$f(x) = \frac{x^5}{x^6 + 1}$$

на отрезке [0,1].

| Базовое число | Отклонение от точного значения |
|---|---|
| 2 | $4.09 \cdot 10^{-12}$ |
| 3 | $0.45 \cdot 10^{-12}$ |
| 4 | $-0.91 \cdot 10^{-12}$ |
| 5 | $-1.02 \cdot 10^{-12}$ |
| 6 | $0.91 \cdot 10^{-12}$ |
| 7 | $1.48 \cdot 10^{-12}$ |

Среднее арифметическое имеет погрешность около $0.91 \cdot 10^{-12}$. Значение, полученное для базового числа 2, является наиболее далёким от среднего арифметического. Таким образом, даже просто замена 2 на $k$, может помочь улучшить результат. Но ещё более значительное улучшение получается при сопоставлении вычислений, выполненных для нескольких значений $k$. Если же после серии экспериментов исключить одно значение, самое удалённое от среднего арифметического, можно дополнительно уменьшить дисперсию рассматриваемой случайной величины. Если исключить $k = 2$, то получим «улучшенное среднее» с погрешностью всего лишь $0{,}23 \cdot 10^{-12}$.

Замечание. Допускается также применение метода к вычислению неопределённых интегралов: по существу, здесь действует тот же самый метод Ромберга, что и для определённого интеграла, однако применяется к каждому отрезку $[0,x]$. Таким образом, можно найти интеграл

$$\Phi(x) = \int_0^x f(t)dt$$

с переменным верхним пределом, где $\Phi(x)$ есть первообразная функции $f(x)$.

Возможно также применение метода к дифференциальным уравнениям. Показано на примере дифференциального уравнения $y' = -y/2$. Программа вычисляет экстраполяционные приближения $y(x)$ для значения $x=1$ при различных значениях базового числа $k$ от 2 до 7, и сравнивает с точным решением.

| Базовое число | Отклонение от точного значения |
|---|---|
| 2 | $5.82 \cdot 10^{-11}$ |
| 3 | $-2.18 \cdot 10^{-11}$ |
| 4 | $-0.64 \cdot 10^{-11}$ |
| 5 | $1.27 \cdot 10^{-11}$ |
| 6 | $-2.36 \cdot 10^{-11}$ |
| 7 | $-1.18 \cdot 10^{-11}$ |

К вопросу о выборе оптимального шага и количества узлов. Естественно, возникает вопрос, до каких пор нужно увеличивать количество узлов в $k$ раз, какое количество $n$ таких шагов является оптимальным. Очевидно, что мы не можем бесконечно измельчать шаг, так как ограничены вычислительными возможностями компьютерной техники, а также разрядной сеткой. Предлагается принять в качестве критерия выбора $n$ достижение наилучшего сгущения значений, то есть производить измельчение разбиения до того момента, пока верно неравенство $\left|A_{i+1} - A_i\right| < \left|A_i - A_{i-1}\right|$. Таким образом, программа автоматически остановит процесс разбиения, когда начнут нарастать ошибки, связанные с чрезмерно большим количеством узлов.

Для сравнения, в следующей таблице показано поведение погрешности вычисления определённого интеграла от тригонометрической функции на отрезке [0,1] при различных $k$ и $n$. Погрешность выражена в единицах $10^{-9}$, округлено до $10^{-11}$. Пустые клетки соответствуют ситуациям, когда отклонение стало меньше $10^{-11}$, либо процесс был остановлен из-за достижения оптимального $n$.

| | $n$=2 | $n$=3 | $n$=4 | $n$=5 | $n$=6 | $n$=7 | $n$=8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$=2 | 113,38 | 28,29 | 7,07 | 1,77 | 0,44 | 0,11 | 0,02 |
| $k$=3 | 22,35 | 2,48 | 0,27 | 0,03 | | | |
| $k$=4 | 7,06 | 0,44 | 0,02 | | | | |
| $k$=5 | 2,89 | 0,11 | | | | | |

Для достижения сопоставимого уровня точности при большем $k$ требуется меньшее $n$. Таким образом, замена базового числа 2 на другое $k$ имеет смысл.

## Заключение

В данной статье предлагается следующая модификация алгоритма Ричардсона. Предлагается рассматривать базовое число

$k > 2$ вместо $k = 2$, то есть работать с последовательностью вида

$$\left\{T(h), T\left(\frac{h}{k}\right), T\left(\frac{h}{k^2}\right), \ldots\right\}.$$

Рассматривая серию экстраполяционных процессов при нескольких $k$, найти среднее арифметическое (это можно рассматривать как математическое ожидание случайной величины, вычисленное по выборке из нескольких значений). Возможно дальнейшее развитие этого метода, а именно, реализация вычисления улучшенного среднего значения, с исключением одного, являющегося самым удалённым от среднего арифметического. Предложенная модификация может быть применена для более точного решения различных физических, в том числе астрономических задач, связанных с движением спутников и астероидов, однако это выходит за рамки данной статьи.

**Список литературы**

1. Richardson L.F. Philos. Trans. Roy Soc. Ser.A, 1910, v.210, p.307–357.

2. Romberg W. Kgl norske vid. selskabs forhandl. 1955, Bd 28, №7, p.30–36.

3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М., 2003. – 632 с.

4. Авдюшев В.А. Численное моделирование орбит: Монография. – Томск: Нац. исслед. Томский гос. ун-т, 2010.

5. Приходовский М.А. Математическое моделирование структурных изменений орбит спутников астероида при сближении с планетой // Успехи современного естествознания. – 2014. – № 12–2. – С. 68–74.