Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

М.А. Приходовский

«Сборник задач для студенческих олимпиад по математике»

Учебно-методическое пособие

Томск
2015

УДК 510(076.2)
ББК 22.1я73
П77

Приходовский М.А.

Сборник задач для студенческих олимпиад по математике: учебно-методическое пособие / М.А. Приходовский - Томск: Изд-во ТУСУР, 2015. - 52 с.

В учебно-методическом пособии представлены авторские олимпиадные задачи на стыке между различными разделами математики, а также несколько существенно переработанных и усложнённых автором ранее использовавшихся задач. Все задачи, собранные в данном пособии, использовались при проведении внутривузовских и городских олимпиад в Томском университете систем управления и радиоэлектроники в 2004-2015 годах, значительная часть из них нигде ранее не была опубликована. Все задачи в данном пособии представлены с решениями. Учебно-методическое пособие может использоваться преподавателями для работы математического кружка при подготовке к студенческим олимпиадам по математике. Может представлять интерес для студентов технических вузов, а также физических и математических факультетов классических университетов.

Автор: Кандидат физ.-мат. наук, доцент ТУСУР, Томск
Приходовский Михаил Анатольевич,

Рецензенты:
Кандидат физ.-мат. наук, доцент НИ ТПУ, Томск
Шахматов Валерий Михайлович

Кандидат физ.-мат. наук, доцент НИ ТГУ, Томск
Гриншпон Яков Самуилович

ЗАДАЧА 1.(Линейная алгебра + дифференциальное исчисление)
Доказать, что для любой пары различных точек A и B, взятых на графике функции $y_1 = e^x$, существует единственная кривая $y_2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, являющаяся касательной к графику этой функции в точках A и B.

РЕШЕНИЕ. Обозначим $A\left(x, e^x\right)$; $B\left(y, e^y\right)$, причём $x \neq y$. Для того, чтобы графики двух функций $y_1 = e^x$ и $y_2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ касались в точках A и B, требуется:
$y_1(x) = y_2(x)$, $y_1'(x) = y_2'(x)$, $y_1(y) = y_2(y)$, $y_1'(y) = y_2'(y)$.

Отсюда получаем систему: $\begin{cases} ax^3 + bx^2 + cx + d & = e^x \\ 3ax^2 + 2bx + c & = e^x \\ ay^3 + by^2 + cy + d & = e^y \\ 3ay^2 + 2by + c & = e^y \end{cases}$

При двух заданных различных числах $x, y \in R$ это система с 4 неизвестными a, b, c, d. Если её основная матрица невырожденная, то существует единственное решение. Докажем, что определитель основной матрицы не равен 0:

$$\begin{vmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \\ 3x^2 & 2x & 1 & 0 \\ y^3 & y^2 & y & 1 \\ 3y^2 & 2y & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \\ 3x^2 & 2x & 1 & 0 \\ y^3 - x^3 & y^2 - x^2 & y - x & 0 \\ 3y^2 & 2y & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} 3x^2 & 2x & 1 \\ y^3 - x^3 & y^2 - x^2 & y - x \\ 3y^2 & 2y & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 3x^2 & 2x & 1 \\ y^3 - x^3 & y^2 - x^2 & y - x \\ 3y^2 - 3x^2 & 2y - 2x & 0 \end{vmatrix} = -(y-x)^2 \cdot \begin{vmatrix} 3x^2 & 2x & 1 \\ y^2 + xy + x^2 & y + x & 1 \\ 3(y+x) & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$== -(y-x)^2 \cdot \begin{vmatrix} 3x^2 & 2x & 1 \\ y^2 + xy - 2x^2 & y - x & 0 \\ 3(y+x) & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(y-x)^2 \cdot \begin{vmatrix} y^2 + xy - 2x^2 & y - x \\ 3(y+x) & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(y-x)^2\left(2y^2 + 2xy - 4x^2 - 3y^2 + 3x^2\right) = (y-x)^2\left(y^2 - 2xy + x^2\right) =$$
$$(y-x)^4 \neq 0.$$

Поскольку координаты x, y точек A и B различны, основная матрица системы невырожденная, решение системы существует и единственно. Следовательно, касательная кривая существует и она единственна.

ЗАДАЧА 2. (Линейные операторы).
Матрица линейного оператора, действующего в n-мерном пространстве:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Найти наименьший острый угол, образованный парой собственных векторов, соответствующих различным собственным числам.
РЕШЕНИЕ.

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 3-\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

корни $\lambda = 1,2,3,\dots,n$. Решая однородную систему с характеристической матрицей для значения $\lambda = 1$, получаем:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

из второго уравнения следует $x_1 = -x_2$, из разности третьего и второго $x_3 = 0$, при учёте этого разность 4-го и 2-го уравнений даёт $x_4 = 0$, и так далее, до $x_n = 0$.
Собственный вектор для $\lambda = 1$ есть вектор (-1,1,0,...,0).
Для $\lambda = 2$ получается система:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

из первого и второго уравнения $x_1 = 0$, из третьего $x_2 = -x_3$, разность 4-го и 3-го даёт $x_4 = 0$, и так далее, до $x_n = 0$. Собственный вектор для $\lambda = 2$ есть вектор (0,-1,1,0,...,0).

Аналогично для $\lambda = 3$ получится вектор (0,0,-1,1,...,0). И так до предпоследнего, $\lambda = n-1$, вектор (0,...0,-1,1).

$$\begin{pmatrix} 1-n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2-n & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & -1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Здесь получаем из 1-го уравнения $x_1 = 0$, затем из 2-го $x_2 = 0$, ... $x_{n-1} = 0$, последняя неизвестная свободная, таким образом, собственный вектор: (0,0,...,0,1).

Модули всех собственных векторов, кроме последнего, равны $\sqrt{2}$, для последнего модуль равен 1. Если значения λ отличаются на 2 и более, то векторы ортогональны, так как очевидно, что их скалярное произведение равно 0, т.е. угол 90^0. Если λ - соседние целые числа, то можно взять два собственных вектора вида: (0,-1,1,0,...,0) и (0,0,1,-1,...,0). Угол между ними вычисляется как $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\right)$ и равен 60^0.

И только для $\lambda = n-1$ и $\lambda = n$ получим $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, то есть 45^0, т.е. $\frac{\pi}{4}$. Ответ. Наименьшее значение $\frac{\pi}{4}$.

ЗАДАЧА 3. (Линейные операторы + предел).

Дана матрица B = $\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$. При каждом a существует два разных собственных числа и два линейно независимых собственных вектора. Найти предел угла между этими собственными векторами при $a \to \infty$ и при $a \to 0$.

РЕШЕНИЕ. Характеристическая матрица: $\begin{vmatrix} \lambda - a & -a \\ 0 & \lambda - a^2 \end{vmatrix} =$

$(\lambda - a)(\lambda - a^2) = 0$.

Собственные числа $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = a^2$. Найдём собственные векторы.

$\lambda_1 = a \quad \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 0 & a - a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = 0$, вектор (1,0).

$\lambda_2 = a^2 \begin{pmatrix} a^2 - a & -a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a(a-1)x_1 = ax_2$, вектор $(1, a-1)$.

Угол между ними можно вычислить с помощью скалярного произведения и их модулей.

$$\cos\varphi = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{1 + (a-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2a + 2}}$$

Предел $\lim\limits_{a \to \infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2a + 2}} = 0$ - это косинус предельного угла,

$\arccos(0) = \frac{\pi}{2} = 90^0$.

При $a \to 0$ получаем $\lim\limits_{a \to 0} \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2a + 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} = 45^0$.

ОТВЕТ. 90^0 и 45^0.

ЗАДАЧА 4. (Уравнения движения + свойства параболы).
Два самолёта движутся прямолинейно и равномерно. Неизвестно, являются ли их траектории пересекающимися или скрещивающимися прямыми. На самолётах вышли из строя системы, определяющие скорость и координаты в пространстве. Работает только радар, измеряющий расстояние до другого объекта в воздухе. Было сделано 3 измерения через равные промежутки времени (t = 0,1,2 сек.), зафиксированы расстояния p, q, r. (причём $p > q > r$, т.к. они сближаются). Вывести формулу для бортовой системы предотвращения столкновений, которая по этим параметрам вычислит минимальное расстояние между самолётами, которое будет достигнуто, если будет продолжено прямолинейное и равномерное движение.

РЕШЕНИЕ.
Пусть (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) координаты первого и второго объекта в начальный момент времени, (v_{z1}, v_{y1}, v_{x1}) и (v_{z2}, v_{y2}, v_{x2}) - векторы скорости этих объектов, тогда квадрат расстояния между ними как функция от времени t:

$$S^2(t) = ((x_1 + v_{x1}t) - (x_2 + v_{x2}t))^2 + ((y_1 + v_{y1}t) - (y_2 + v_{y2}t))^2 +$$
$$+ ((z_1 + v_{z1}t) - (z_2 +_{z2} t))^2$$

После раскрытия скобок получится квадратный трёхчлен вида $at^2 + bt + c$. Известно, что парабола полностью определяется своими значениями в трёх различных точках. Таким образом, для 3 различных измерений расстояния можно определить расстояние между объектами в любой последующий момент времени, а значит, вычислить минимум расстояния между объектами (и время, в которое он будет достигаться). Измеренные расстояния в моменты времени 0,1,2 сек. равны соответственно p, q, r, тогда коэффициенты в уравнении квадрата расстояния между объектами могут быть вычислены из системы линейных уравнений с неизвестными a, b, c (для t=0,1,2 соответственно):

$$\begin{cases} c = p^2 \\ a + b + c = q^2 \\ 4a + 2b + c = r^2 \end{cases}$$

Из первого выразим $c = p^2$, тогда система сводится к системе двух уравнений:

$$\begin{cases} a + b = q^2 - p^2 \\ 4a + 2b = r^2 - p^2 \end{cases}$$

Решая эту систему методом Гаусса, получаем:

$$a = \frac{p^2 - 2q^2 + r^2}{2}, \quad b = \frac{4q^2 - 3p^2 - r^2}{2}.$$

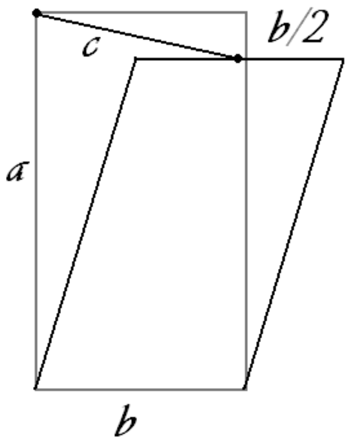
Теперь известны все коэффициенты функции $S^2(t)$, можно вычислить время, при котором достигается минимальное сближение. Вершина параболы имеет абсциссу $\left(-\frac{b}{2a}\right)$, поэтому $T_{\min} = -\frac{b}{2a} = \frac{3p^2 - 4q^2 + r^2}{2(p^2 - 2q^2 + r^2)}$. Квадрат минимального расстояния, достигаемый в указанный момент времени: $S_{\min}{}^2 = aT_{\min}{}^2 + bT_{\min} + c$ $= \frac{b^2}{4a^2}a - \frac{b}{2a}b + p^2 = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + p^2 = p^2 - \frac{b^2}{4a} =$ $p^2 - \frac{(4q^2 - 3p^2 - r^2)^2}{8(p^2 - 2q^2 + r^2)}$. Тогда $S_{\min} = \sqrt{p^2 - \frac{(4q^2 - 3p^2 - r^2)^2}{8(p^2 - 2q^2 + r^2)}}$.

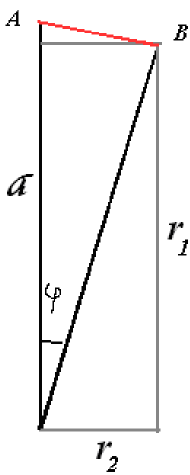
Ответ: $S_{\min} = \sqrt{p^2 - \frac{(4q^2 - 3p^2 - r^2)^2}{8(p^2 - 2q^2 + r^2)}}$.

ЗАДАЧА 5. (Геометрия + тригонометрия)

Открывающаяся секция пластикового окна - прямоугольник со сторонами a, b, причём $a > b$. При вертикальном открывании секция держится на металлическом штыре, длина которого равна c ($b/2 < c < b$). Штырь с одной стороны закреплён в углу неподвижной части, а с другой стороны скользит ровно до середины движущейся секции. Вычислить максимальный угол, на который открывается окно.

РЕШЕНИЕ.





На чертеже 2 видно, что $r_1 = a\cos\varphi$, $r_2 = a\sin\varphi$. Вычислим по теореме Пифагора расстояние от угловой точки неподвижной части до середины открывающейся секции в зависимости от φ. В проекции на плоскость, перпендикулярную повороту, это расстояние $|AB| = \sqrt{(r_2)^2 + (a - r_1)^2}$,

$$|AB| = \sqrt{(a\sin\varphi)^2 + (a - a\cos\varphi)^2}$$

При этом также видно, что $|BC| = \dfrac{b}{2}$.

Тогда $|AC| = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2} = \sqrt{(a\sin\varphi)^2 + (a - a\cos\varphi)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$

Но при этом по условию, $|AC| = c$, поэтому:

$$(a\sin\varphi)^2 + (a - a\cos\varphi)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c^2.$$

Далее преобразуем это выражение, чтобы выразить φ.

$$a^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + a^2 - 2a^2\cos\varphi = c^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

$$2a^2(1 - \cos\varphi) = c^2 - \frac{b^2}{4} = \frac{4c^2 - b^2}{4},$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{4c^2 - b^2}{8a^2}, \qquad \varphi = \arccos\left(1 - \frac{c^2}{2a^2} + \frac{b^2}{8a^2}\right) =$$

$$\arccos\left(\frac{8a^2 - 4c^2 + b^2}{8a^2}\right).$$

Ответ: $\varphi = \arccos\left(1 - \frac{c^2}{2a^2} + \frac{b^2}{8a^2}\right)$.

ЗАДАЧА 6. (Тригонометрия + векторная алгебра).
Вывести формулу расстояния по поверхности планеты между двумя городами, географические координаты которых $(\varphi_{1,}\psi_1)$ и $(\varphi_{2,}\psi_2)$, где φ - широта (от -90^0 до 90^0), ψ - долгота (от 0^0 до 360^0). Планету считать идеальным шаром радиуса R.

РЕШЕНИЕ.
Найдём формулы перехода от декартовых координат к географическим. Проекция на ось *Oz* соответствует sin широты, $z = R\sin\varphi$. Тогда проекция на плоскость Oxy есть $R\cos\varphi$, а так как она проецируется ещё на оси x,y, в итоге имеем:

$$\{x = R\cos\varphi\cos\psi,\ \ y = R\cos\varphi\sin\psi,\ \ z = R\sin\varphi\}.$$

(Аналогично сферическим координатам, только φ здесь отмеряется от экватора, а не северного полюса).
Теперь проведём два радиус-вектора к двум данным точкам планеты из её центра.

$$r_1 = \{x = R\cos\varphi_1\cos\psi_1,\ \ y = R\cos\varphi_1\sin\psi_1,\ \ z = R\sin\varphi_1\}.$$

$$r_2 = \{x = R\cos\varphi_2\cos\psi_2,\ \ y = R\cos\varphi_2\sin\psi_2,\ \ z = R\sin\varphi_2\}.$$

Скалярное произведение равно произведению модулей на косинус угла. Таким образом, угол равен $\alpha = \arccos\left(\dfrac{(r_1, r_2)}{|r_1|\cdot|r_2|}\right)$. Также верно $|r_1| = |r_2| = R$, т.к. обе точки расположены на поверхности планеты.

$$(r_1, r_2) =$$

$$R^2(\cos\varphi_1\cos\psi_1\cos\varphi_2\cos\psi_2 + \cos\varphi_1\sin\psi_1\cos\varphi_2\sin\psi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2)$$

$$= R^2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2(\cos\psi_1\cos\psi_2 + \sin\psi_1\sin\psi_2) + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) =$$

$$R^2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos(\psi_1 - \psi_2) + \sin\varphi_1\sin\varphi_2)\ .$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{(r_1, r_2)}{|r_1|\cdot|r_2|}\right) =$$

$$\arccos\left(\frac{R^2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos(\psi_1 - \psi_2) + \sin\varphi_1\sin\varphi_2)}{R^2}\right) =$$

$\arccos\left(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\psi_1 - \psi_2) + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2\right)$ - угол между векторами, проведёнными из центра планеты к двум точкам с данными географическими координатами. Чтобы найти расстояние, нужно этот угол умножить на радиус планеты, то есть R.
В итоге $L = R \cdot \arccos\left(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\psi_1 - \psi_2) + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2\right)$.
(Если угол максимален, $\alpha = \pi$, получается $L = \pi \cdot R$, половина длины окружности).

ОТВЕТ. $L = R \cdot \arccos\left(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\psi_1 - \psi_2) + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2\right)$.

ЗАДАЧА 7. (Матрицы)
Найти отношение произведения всех элементов матрицы A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{2015}$ к сумме всех элементов этой матрицы.

РЕШЕНИЕ. $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}, A^6 = \begin{pmatrix} 5^3 & 0 \\ 0 & 5^3 \end{pmatrix}$ Таким образом, для всех чётных степеней ответ известен, в частности $A^{2014} = \begin{pmatrix} 5^{1007} & 0 \\ 0 & 5^{1007} \end{pmatrix}$. Тогда $A^{2015} = \begin{pmatrix} 5^{1007} & 2 \cdot 5^{1007} \\ 2 \cdot 5^{1007} & -5^{1007} \end{pmatrix}$ и сумма равна $4 \cdot 5^{1007}$, а произведение $-4 \cdot (5^{1007})^4 = -4 \cdot 5^{4028}$. Отношение произведения к сумме

$$\frac{-4 \cdot 5^{4028}}{4 \cdot 5^{1007}} = -\frac{5^{4028}}{5^{1007}} = -5^{3021}.$$

ОТВЕТ. Отношение произведения всех элементов матрицы к сумме всех элементов этой матрицы равно -5^{3021}.

ЗАДАЧА 8. (Геометрия + векторная алгебра).
На прямой $y = ax$ при любом параметре $a \in R$ есть точка, ближайшая к точке (C,0). Найти неявное уравнение кривой, которую образуют все такие точки при $a \in R$.

РЕШЕНИЕ.
Пусть точка является ближайшей к (C,0). Тогда вектор $(1, a)$, расположенный на прямой, перпендикулярен вектору, соединяющему точку (x, ax) с точкой $(C, 0)$, то есть вектору $(x - C, ax)$. Скалярное произведение векторов $(1, a)$ и $(x - C, ax)$ равно 0, то есть
$x - C + a^2 x = 0$. Отсюда можно найти абсциссу точки, которая является ближайшей к указанной. $(1 + a^2)x = C$, $x = \dfrac{C}{1 + a^2}$. Тогда
$y = \dfrac{Ca}{1 + a^2}$. Это параметрические уравнения кривой. Чтобы найти неявное уравнение кривой, нужно устранить зависимость от параметра, то есть выразить a из одного уравнения и подставить во второе. Из первого уравнения: $a^2 x = C - x$, $a^2 = \dfrac{C - x}{x}$,
$a = \pm\sqrt{\dfrac{C - x}{x}}$.

$$y = \frac{Ca}{1 + a^2} = \pm C\sqrt{\frac{C - x}{x}} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{C - x}{x}} = \pm C\sqrt{\frac{C - x}{x}} \cdot \frac{x}{x + C - x} =$$

$$\pm\sqrt{\frac{C - x}{x}} \cdot x = \pm\sqrt{C - x} \cdot \sqrt{x}$$

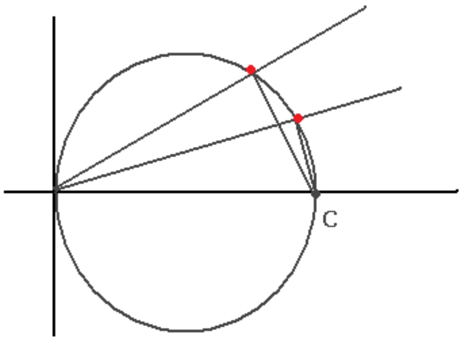
$y = \pm\sqrt{C - x} \cdot \sqrt{x}$ тогда $y^2 = (C - x)x$, $y^2 = Cx - x^2$,
$y^2 + x^2 - Cx = 0$, выделим полный квадрат:

$$y^2 + \left(x - \frac{C}{2}\right)^2 - \frac{C^2}{4} = 0, \quad \left(x - \frac{C}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{C^2}{4}.$$

Таким образом, кривая, состоящая из точек, являющихся ближайшими к (C,0), есть окружность с центром в точке $\left(\frac{C}{2},0\right)$ радиуса $\frac{C}{2}$.

ОТВЕТ. $\left(x-\frac{C}{2}\right)^2+y^2=\frac{C^2}{4}$ окружность с центром в точке $\left(\frac{C}{2},0\right)$ радиуса $\frac{C}{2}$.

Чертёж:



ЗАДАЧА 9. (Геометрия).
Найти условие на параметры a, b, c, так чтобы уравнение $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$ задавало эллипс площади больше 1.

Справка: Площадь эллипса с полуосями A, B равна πAB.

РЕШЕНИЕ. Каноническое уравнение эллипса с полуосями A,B имеет вид $\dfrac{x^2}{A^2} + \dfrac{y^2}{B^2} = 1$.

Кривая задана квадратичной формой $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$.
Она является эллипсом, если собственные числа матрицы квадратичной формы $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ имеют один и тот же знак.

$$\begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -b & \lambda - c \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - c) - b^2 = \lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - b^2) = 0.$$

Корни λ_1, λ_2 вычисляются через дискриминант и равны:

$$\frac{(a+c) \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac - b^2)}}{2}$$

Их произведение:

$$\frac{(a+c) + \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac - b^2)}}{2} \cdot \frac{(a+c) - \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac - b^2)}}{2} =$$

$$\frac{(a+c)^2 - ((a+c)^2 - 4(ac - b^2))}{4} = ac - b^2 > 0.$$

При этом, после преобразования координат, уравнение эллипса примет вид $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 = 1$. А поскольку каноническое уравнение эллипса с полуосями A,B имеет вид $\dfrac{x^2}{A^2} + \dfrac{y^2}{B^2} = 1$, то связь между полуосями и собственными числами такова:

$$A = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \ B = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}.$$

Тогда площадь эллипса:

$$\pi AB = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} = \frac{\pi}{\sqrt{(ac-b^2)}} > 1, \quad \sqrt{(ac-b^2)} < \pi,$$

тогда $(ac-b^2) < \pi^2$.

ОТВЕТ. $0 < ac-b^2 < \pi^2$.

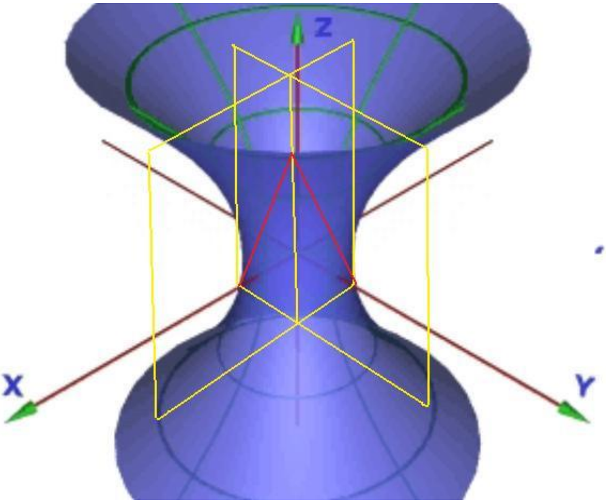
ЗАДАЧА 10. (Геометрия)
Уравнение однополостного гиперболоида вращения имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Найти отношение $\frac{a}{c}$, при котором угол между прямолинейными образующими гиперболоида, лежащими в перпендикулярных плоскостях, составляет 30 градусов.

РЕШЕНИЕ.
Возьмём точки, принадлежащие гиперболоиду, на осях Ox и Oy: $(a,0,0)$ и $(0,a,0)$. Прямолинейные образующие гиперболоида лежат в вертикальных плоскостях с уравнениями $x=a$ и $y=a$. Подставляя в уравнение гиперболоида, получим уравнения искомых прямых: $\frac{y}{a}=\pm\frac{z}{c}$ и $\frac{x}{a}=\pm\frac{z}{c}$. Они пересекаются там, где пересекаются две вертикальные плоскости, то есть над и под точкой $(a,a,0)$, а именно в точках (a,a,c) и $(a,a,-c)$. Рассмотрим две образующих, которые пересекаются в точке (a,a,c). Первая из них проходит через $(a,0,0)$ и (a,a,c), значит, направляющий вектор $l_1=(0,a,c)$. Вторая образующая прямая проходит через $(0,a,0)$ и (a,a,c), для неё направляющий вектор $l_2=(a,0,c)$. Угол между ними вычисляется как $\arccos\left(\frac{(l_1,l_2)}{|l_1|\cdot|l_2|}\right)=\arccos\left(\frac{c^2}{a^2+c^2}\right)$.

Если угол 30 градусов, то $\frac{c^2}{a^2+c^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $1+\left(\frac{a}{c}\right)^2=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Ответ. $\frac{a}{c}=\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}-1}$.

Чертёж:



ЗАДАЧА 11. (Геометрия + математический анализ (экстремум))
Найти такое отношение высоты к радиусу основания конуса, чтобы при фиксированном объёме площадь боковой поверхности конуса была минимальна.

Справка. Площадь боковой поверхности конуса вычисляется по формуле πRl, где l - длина боковой образующей.

РЕШЕНИЕ. Объём конуса $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi R^2 h$, боковая образующая вычисляется по теореме Пифагора: $l = \sqrt{R^2 + h^2}$. Найти экстремум величины πRl при фиксированном объёме V. Сначала выразим высоту через R: $h = \frac{3V}{\pi R^2}$. Тогда $l = \sqrt{R^2 + \left(\frac{3V}{\pi R^2}\right)^2}$.

$$\pi Rl = \pi R\sqrt{R^2 + \left(\frac{3V}{\pi R^2}\right)^2} = \pi R\sqrt{R^2 + \frac{9V^2}{\pi^2 R^4}} = \pi R\sqrt{\frac{\pi^2 R^6 + 9V^2}{\pi^2 R^4}} =$$

$$\pi R\frac{\sqrt{\pi^2 R^6 + 9V^2}}{\pi R^2} = \frac{\sqrt{\pi^2 R^6 + 9V^2}}{R}.$$

Найдём условие, при котором производная по R равна 0.

$$\left(\frac{\sqrt{\pi^2 R^6 + 9V^2}}{R}\right)' = \frac{\frac{6R^5\pi^2}{2\sqrt{\pi^2 R^6 + 9V^2}} R - \sqrt{\pi^2 R^6 + 9V^2}}{R^2} = 0$$

$$\frac{3R^5\pi^2}{\sqrt{\pi^2 R^6 + 9V^2}} R = \sqrt{\pi^2 R^6 + 9V^2},\ 3R^6\pi^2 = \pi^2 R^6 + 9V^2,$$

$$2R^6\pi^2 = 9V^2,\ R^6 = \frac{9}{2}\frac{V^2}{\pi^2},\ R = \sqrt[6]{\frac{9}{2}}\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

Замечание. Можно также убедиться, что получили минимум, а не максимум. Для этого установим тот факт, что вторая производная по параметру R положительна.

$$\left(\frac{\sqrt{\pi^2R^6+9V^2}}{R}\right)'' = \frac{1}{R^2}\left(\frac{3R^6\pi^2}{\sqrt{\pi^2R^6+9V^2}} - \sqrt{\pi^2R^6+9V^2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{R^2}\left(\frac{18R^5\pi^2\sqrt{\pi^2R^6+9V^2} - \left(\sqrt{\pi^2R^6+9V^2}\right)' 3R^6\pi^2}{\pi^2R^6+9V^2}\right)$$

$- \frac{1}{R^2}\frac{6\pi^2R^5}{2\sqrt{\pi^2R^6+9V^2}}$, *что в итоге сводится к выражению*

$$\frac{1}{R^2}\left(\frac{18R^5\pi^2\left(\pi^2R^6+9V^2\right) - 3\pi^2R^5 3R^6\pi^2}{\sqrt{\pi^2R^6+9V^2}^{\,3}} - \frac{3\pi^2R^5\left(\pi^2R^6+9V^2\right)}{\sqrt{\pi^2R^6+9V^2}^{\,3}}\right) \text{У}$$

множим на положительную величину $R^2\sqrt{\pi^2R^6+9V^2}^{\,3}$*, теперь достаточно проверить знак выражения:*

$$18R^5\pi^2\left(\pi^2R^6+9V^2\right) - 3\pi^2R^5 3R^6\pi^2 - 3\pi^2R^5\left(\pi^2R^6+9V^2\right)$$

После приведения подобных получаем:

$3\pi^2R^5(2R^6\pi^2+45V^2)$ *>0*

Подставим найденное выражение $R = \sqrt[6]{\frac{9}{2}}\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ в h:

$h = \frac{3V}{\pi R^2} = \frac{3V}{\pi\left(\sqrt[6]{\frac{9}{2}}\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)^2}$. Найдём соотношение $\frac{h}{R}$.

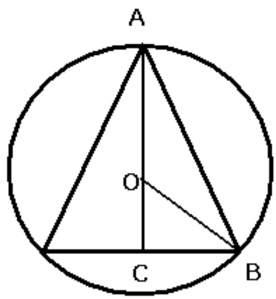
$$\frac{3V}{\pi\left(\sqrt[6]{\frac{9}{2}}\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{\frac{9}{2}}\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}} = \frac{3V}{\pi\left(\sqrt[6]{\frac{9}{2}}\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)^3} = \frac{3V}{\pi\sqrt{\frac{9}{2}}\frac{V}{\pi}} = \frac{3}{\sqrt{\frac{9}{2}}} = \sqrt{2}\,.$$

ОТВЕТ: $\sqrt{2}$.

ЗАДАЧА 12. (Геометрия + математический анализ (экстремум))
Найти, какую максимальную долю объёма может занимать прямой круговой конус, вписанный в шар радиуса R.

РЕШЕНИЕ.

Объём шара равен, как известно, $\frac{4}{3}\pi R^3$. Для вписанного в шар конуса, высота h и радиус r взаимосвязаны между собой. Расстояние от центра основания конуса до центра шара есть $|h-R|$ (см.чертёж - вид сбоку, на чертеже это OC). Отрезок BC на чертеже равен r - радиусу основания конуса. Далее, по теореме Пифагора $(OC)^2+(BC)^2 = (OB)^2$.



То есть, $(h-R)^2 + r^2 = R^2$, следовательно, $(h-R)^2 + r^2 = R^2$,
$r^2 = R^2 - (h-R)^2$,
$r^2 = R^2 - (h^2 + R^2 - 2Rh)$, $r^2 = 2Rh - h^2$. По известным формулам, объём конуса равен $V = \frac{1}{3}Sh$, а площадь основания $S = \pi r^2$, тогда $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $V = \frac{1}{3}\pi(2Rh - h^2)h = \frac{\pi}{3}(2Rh^2 - h^3)$.

Найдём экстремум по h.

$V'(h) = \frac{\pi}{3}(4Rh - 3h^2) = 0$, $4Rh = 3h^2$, $h = \frac{4}{3}R$.

Легко убедиться, что это именно максимум, так как вторая производная отрицательна: $V''(h) = \frac{\pi}{3}(4R - 6h)$, при $h = \frac{4}{3}R$

получается $V''(h) = \frac{\pi}{3}\left(4R - 6\frac{4}{3}R\right) = -4\frac{\pi}{3}R < 0$.

При этом значении объём конуса равен $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ =

$$V = \frac{1}{3}\pi(2Rh - h^2)\frac{4}{3}R = \frac{1}{3}\pi\left(2R\frac{4}{3}R - \frac{16}{9}R^2\right)\frac{4}{3}R =$$

$$\frac{4}{9}\pi R^3\left(\frac{8}{3} - \frac{16}{9}\right) = \frac{4}{9}\pi R^3\frac{8}{9} = \frac{32}{81}\pi R^3.$$

Нужно найти отношение объёма конуса к объёму шара, поэтому поделим друг на друга объёмы этих тел: $\frac{32}{81}\pi R^3 : \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32}{81}\cdot\frac{3}{4} =$

$\frac{8}{27}$.

ОТВЕТ. Максимальная доля объёма, занимаемая вписанным конусом в шаре, $\frac{8}{27}$.

ЗАДАЧА 13. (Геометрия + математический анализ (экстремум))
На плоском листе нарисован график функции $\sin^2 t$, затем лист свёрнут в цилиндр радиуса 1 вокруг оси Z так, чтобы совпали точки, отличающиеся на 2π. Найти наибольший угол между касательной к получившейся пространственной кривой и плоскостью Oxy.

РЕШЕНИЕ. Пусть исходный график лежит в плоскости параметров t, u, график $u = \sin^2 t$. Преобразование координат при таком переходе от плоскости параметров (t, u) к пространственным координатам (x, y, z) задаётся так: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = u$.
Таким образом, указанная кривая переходит в пространственную кривую, заданную параметрически:
$x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \sin^2 t$. Касательная к пространственной кривой выражается по формуле: $(x', y', z') = (-\sin t, \cos t, 2\sin t\cos t)$. Тангенс угла наклона касательной по отношению к плоскости Oxy можем найти по формуле $\frac{z'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} =$

$\frac{2\sin t\cos t}{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}} = 2\sin t\cos t = \sin 2t$. Экстремум достигается при

$(\sin 2t)' = 2\cos 2t = 0$ $2t = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $t = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$. Это соответствует 4-м касательным к пространственной кривой, а именно в точках $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$, tg угла наклона $\frac{z'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} = \sin 2t = 1$ в указанных точках, поэтому искомый угол 45 градусов.
ОТВЕТ: 45 градусов.

ЗАДАЧА 14. (Геометрия + математический анализ (экстремум))
Поверхность $z = ax^2 - by^2$ пересекается с прямым круговым цилиндром $x^2 + y^2 = 1$. Найти максимальный угол между касательной к получившейся пространственной кривой и плоскостью 0xy.

РЕШЕНИЕ.
Для справки, при $ab > 0$ поверхность вида $z = ax^2 - by^2$ есть гиперболический параболоид, при $ab < 0$ это эллиптический параболоид. Для того, чтобы найти уравнения пространственной кривой, введём параметр t. Так как движение в проекции на плоскость 0xy происходит по окружности, то очевидно,
$x = \cos t$, $y = \sin t$. Тогда $z = a\cos^2 t - b\sin^2 t$. $0 \le t < 2\pi$.
Вычислим направляющий вектор касательной:
$x' = -\sin t$, $y' = \cos t$.
$z' = 2a\cos t(-\sin t) - 2b\sin t\cos t$ = $-2(a+b)\sin t\cos t$ = $-(a+b)\sin 2t$.
Вообще, для произвольного вектора $\overline{P} = (A, B, C)$ тангенс угла наклона $\dfrac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, тогда угол наклона к горизонтальной плоскости равен $arctg\left(\dfrac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)$. В этой задаче направляющий вектор $(-\sin t, \cos t, -(a+b)\sin 2t)$, поэтому угол наклона равен $arctg\left(\dfrac{-(a+b)\sin 2t}{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}}\right) = -arctg((a+b)\sin 2t)$.
В задаче требуется только абсолютное значение угла, поэтому знаком «-» можно пренебречь. Итак, осталось найти экстремум величины $arctg((a+b)\sin 2t)$. Но arctg функция монотонная, поэтому достаточно найти и приравнять к 0 производную только от $(a+b)\sin 2t$. (Впрочем, даже если вычислить производную от $arctg((a+b)\sin 2t)$, мы всё равно получим, что равенство нулю должно быть именно в числителе, и результат будет точно таким же).

Итак, $\left((a+b)\sin 2t\right)' = 2(a+b)\cos 2t = 0$, что возможно лишь в двух случаях:

1) $b=-a$, этот случай соответствует поверхности $z=a(x^2+y^2)$ - эллиптический параболоид. Для него любое горизонтальное сечение есть окружность, и угол наклона тождественно равен 0, и его максимум тоже 0.

2) $\cos 2t = 0$, при этом $2t=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $t=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, что фактически даёт всего два разных значения: $t=\frac{\pi}{4}$ и $t=\frac{3\pi}{4}$. При этом угол между горизонтальной плоскостью и касательной к рассматриваемой кривой составляет $arctg\left((a+b)\sin 2t\right)$, т.е. получаем значения $arctg\left((a+b)\sin\frac{\pi}{2}\right)$ и $arctg\left((a+b)\sin\frac{3\pi}{2}\right)$, по модулю они одинаковы, и равны величине $arctg(a+b)$.

Ответ: Максимальный угол составляет $arctg(a+b)$.

ЗАДАЧА 15. (Геометрия + математический анализ (экстремум))
Уравнения движения точки заданы параметрически: $\{x(t)=t^2, y(t)=1-t^3\}$. Касательная к её траектории отсекает треугольник в первой четверти. Найти наименьшую возможную площадь такого треугольника.

Решение. Уравнение касательной $y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$, а для параметрической кривой производная вычисляется так:
$f'(x_0)=\dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$. Итак, найдём уравнение касательной для произвольного параметра t.

$y-(1-t^3)=\dfrac{-3t^2}{2t}\cdot(x-t^2)$, $\quad y+\dfrac{3}{2}tx=\dfrac{3}{2}t^3-t^3+1$, подставим x=0 для поиска точки пересечения касательной с осью Oy, и y=0 для поиска пересечения с осью Ox.

Находим, что точки пересечения с координатными осями: $\left(0,\dfrac{t^3}{2}+1\right)$ и $\left(\dfrac{t^2}{3}+\dfrac{2}{3t},0\right)$.

Площадь треугольника равна $S=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{t^3}{2}+1\right)\left(\dfrac{t^2}{3}+\dfrac{2}{3t}\right)=$

$\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{t^3}{2}+1\right)\left(t^2+\dfrac{2}{t}\right)=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{t^5}{2}+2t^2+\dfrac{2}{t}\right)$. Осталось найти экстремум по t.

Уравнение $S'(t)=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5t^4}{2}+4t-\dfrac{2}{t^2}\right)=0$ сводится к уравнению

$5t^6+8t^3-4=0$. Обозначим $t^3=u$ и решим квадратичное уравнение

$5u^2+8u-4=0$, $u=\dfrac{-8\pm\sqrt{144}}{10}=\dfrac{-4\pm 6}{5}$, имеет смысл только положительное u так же как и t (так как при их отрицательных значениях треугольник находится не в первой четверти).

$$u = t^3 = \frac{2}{5},\ t = \sqrt[3]{\frac{2}{5}}.$$

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{2} + 1\right)\left(\frac{t^2}{3} + \frac{2}{3t}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} + 1\right)\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{4}{25}} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{5}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{5}\right)$$

$$\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{4}{25}} + 2\cdot\sqrt[3]{\frac{5}{2}}\right) = \frac{1}{5}\left(\sqrt[3]{\frac{4}{25}} + 2\cdot\sqrt[3]{\frac{5}{2}}\right).$$

ОТВЕТ. Наименьшая возможная площадь равна $\frac{1}{5}\left(\sqrt[3]{\frac{4}{25}} + 2\cdot\sqrt[3]{\frac{5}{2}}\right)$.

ЗАДАЧА 16. (Математический анализ)

Доказать монотонность функции x^{x^x} на полуоси $(0,+\infty)$.

РЕШЕНИЕ. Функция x^{x^x} рассматривается на полуоси $(0,+\infty)$. $x^{x^x} = e^{x^x \ln x} = \exp\left(e^{x\ln x} \ln x\right)$. Докажем, что функция $x^{(x^x)}$ монотонно возрастает. Найдём производную:

$$f' = \exp\left(e^{x\ln x} \ln x\right) \cdot \left(e^{x\ln x} \ln x\right)' =$$

$$\exp\left(e^{x\ln x} \ln x\right) \cdot \left(e^{x\ln x} \frac{1}{x} + (x\ln x)' e^{x\ln x} \ln x \right) =$$

$$= \exp\left(e^{x\ln x} \ln x\right) \cdot \left(e^{x\ln x} \frac{1}{x} + \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) e^{x\ln x} \ln x \right) =$$

$$\exp\left(e^{x\ln x} \ln x\right) \cdot e^{x\ln x} \cdot \left(\frac{1}{x} + (\ln x + 1)\ln x \right) =$$

$$= \exp\left(e^{x\ln x} \ln x\right) \cdot \exp\left(x\ln x\right) \cdot \left(\frac{1}{x} + \ln^2 x + \ln x \right).$$

Очевидно, что $\exp\left(e^{x\ln x} \ln x\right) > 0$, $\exp\left(x\ln x\right) > 0$. Осталось доказать, что $\frac{1}{x} + \ln^2 x + \ln x > 0$, то есть $-\ln x < \frac{1}{x} + \ln^2 x$ или $\ln\frac{1}{x} < \frac{1}{x} + \ln^2 x$ (1). При $x = 1$ неравенство (1) выполняется $(0 < 1)$.

Также заметим, что для всех $x \in (0,\infty)$ справедливо $\frac{1}{x} + \ln^2 x > 0$.

При $x \in (1,\infty)$: $\ln\frac{1}{x} < 0$, поэтому неравенство (1) выполняется.

При $x \in (0,1)$: значение $\ln\frac{1}{x}$ положительно, однако можно утверждать, что $\ln\frac{1}{x} < \frac{1}{x}$, так как $\ln t < t \quad \forall t > 1$. Тем более, если добавить к дроби $\frac{1}{x}$ заведомо положительную величину $\ln^2 x$. Таким образом, мы доказали, что $\frac{1}{x}+\ln^2 x+\ln x>0$ для всех $x\in(0,\infty)$, то есть исследуемая функция монотонно возрастает.

Замечание. Можно рассматривать и такой вариант задачи:

ЗАДАЧА 15А. Сколько корней имеет уравнение $x^{x^x}-\frac{1}{x^3}=0$ на полуоси $(0,+\infty)$?

Корень $x=1$ очевиден. Функция $\frac{1}{x^3}$ является монотонно убывающей на правой полуоси. Выше доказано, что функция x^{x^x} монотонно возрастает на правой полуоси, тогда других корней нет, единственный корень $x=1$.

ЗАДАЧА 17. (Математический анализ (экстремум))

Для функции $f(x) = x^{nx^n}$ на множестве $(0,+\infty)$ при каждом $n \in N$ существует точка экстремума (x_n, y_n). Найти предельную точку этой последовательности: $(x_0, y_0) = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n)$.

РЕШЕНИЕ.

Необходимо сначала найти экстремум для произвольного n.

Прологарифмируем исходное выражение: $x^{nx^n} = (e^{\ln x})^{nx^n}$ = $\exp(nx^n \ln x)$.

Тогда $f'(x) = \exp(nx^n \ln x)\cdot(nx^n \ln x)'$ =

$\exp(nx^n \ln x)\cdot n\left(nx^{n-1}\ln x + x^n \dfrac{1}{x}\right)$ =

$\exp(nx^n \ln x)\cdot n\left(nx^{n-1}\ln x + x^{n-1}\right)$ =

$\exp(nx^n \ln x)\cdot nx^{n-1}\left(n\ln x + 1\right)$. На правой полуоси обращаться в 0 может только множитель $\left(n\ln x + 1\right)$, поэтому экстремум достигается при $n\ln x + 1 = 0$, то есть

$\ln x = -\dfrac{1}{n}$, $x = e^{-\frac{1}{n}}$. Итак, для n получили $x_n = e^{-\frac{1}{n}}$.

При этом ордината

$$y_n = \exp\left(-\frac{1}{n}ne^{-\frac{1}{n}n}\right),\ y_n = \exp\left(-e^{-1}\right) = \exp\left(-\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{1}{e}}.$$

При этом оказалось, что ордината не зависит от n:

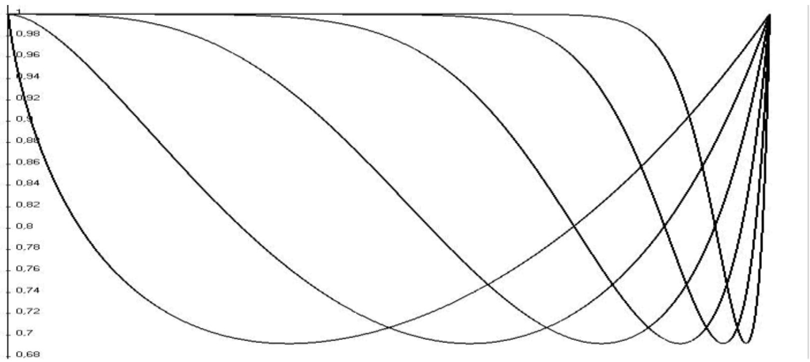
$$(x_n, y_n) = \left(e^{-\frac{1}{n}}, e^{-\frac{1}{e}}\right).$$

Предел нужно вычислить только по первой координате, так как вторая есть константа. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right) = 0$.

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n}} = e^{0} = 1.$

ОТВЕТ. Точка $\left(1, e^{-1/e}\right)$.

Ниже для сведения показаны графики этих функций. Экстремум смещается вправо при увеличении n, но остаётся на той же самой высоте.



ЗАДАЧА 18. (Математический анализ (пределы)).
Найти разность между односторонними пределами в точке 0 для

$$f(x)=\frac{e^x-\cos^2 x}{\sqrt{1-\cos^3 x}}.$$

РЕШЕНИЕ.

$$\frac{e^x-\cos^2 x}{\sqrt{1-\cos^3 x}}=\frac{(e^x-1)+(1-\cos^2 x)}{\sqrt{1-\cos x}\cdot\sqrt{1+\cos x+\cos^2 x}}=$$

$$\frac{(e^x-1)+\sin^2 x}{\sqrt{1-\cos x}\cdot\sqrt{1+\cos x+\cos^2 x}}=$$

$$=\frac{(e^x-1)+\sin^2 x}{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\sqrt{1+\cos x+\cos^2 x}}=$$

$$\frac{(e^x-1)+\sin^2 x}{\sqrt{2}\cdot\left|\sin\frac{x}{2}\right|\cdot\sqrt{1+\cos x+\cos^2 x}}.$$

При переходе через точку $x=0$ $\sin\frac{x}{2}$ меняет знак с «-» на «+»,

выражение $\dfrac{(e^x-1)+\sin^2 x}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\cos x+\cos^2 x}}$ в окрестности точки $x=0$

имеет положительные значения. Таким образом,

$$\frac{(e^x-1)+\sin^2 x}{\sqrt{2}\cdot\left|\sin\frac{x}{2}\right|\cdot\sqrt{1+\cos x+\cos^2 x}}=$$

$$-\frac{(e^x-1)+\sin^2 x}{\sqrt{2}\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\sqrt{1+\cos x+\cos^2 x}}\quad \text{при } x\to 0-0$$

$$\frac{(e^{x}-1)+\sin^{2}x}{\sqrt{2}\cdot\left|\sin\frac{x}{2}\right|\cdot\sqrt{1+\cos x+\cos^{2}x}}=$$

$$\frac{(e^{x}-1)+\sin^{2}x}{\sqrt{2}\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\sqrt{1+\cos x+\cos^{2}x}}\ \text{при}\ x\to 0+0$$

Односторонние пределы найдём методом замены на эквивалентные бесконечно малые

$$\lim_{x\to\pm 0}\frac{e^{x}-\cos^{2}x}{\sqrt{1-\cos^{3}x}}=\lim_{x\to\pm 0}\frac{e^{x}-1+\sin^{2}x}{\sqrt{2}\cdot\left|\sin\frac{x}{2}\right|\cdot\sqrt{1+\cos x+\cos^{2}x}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\lim_{x\to\pm 0}\frac{x+x^{2}}{\pm\sin\frac{x}{2}}=\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\lim_{x\to\pm 0}\frac{x+x^{2}}{\pm x}=\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\lim_{x\to\pm 0}\left(\pm 1\pm x\right)=$$

$\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ Ответ. $2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{8}{3}}$.

График функции представлен на чертеже:

ЗАДАЧА 19. (Математический анализ + ряды).

Пусть $f_0(x)=\ln\frac{1}{x}$, $f_1(x)=\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)$, … $f_{n+1}(x)=\ln\left(f_n(x)\right)$. Пусть a_n - точная верхняя граница области определения функции $f_n(x)$.

Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

РЕШЕНИЕ. Область определения функции $f_1(x)=\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)$ совпадает с множеством точек, где функция $f_0(x)=\ln\frac{1}{x}=-\ln x$ положительна, то есть $D(f_1)=(0{,}1)$. Кроме того, $f_0(x)=\ln\frac{1}{x}$ монотонно убывает, поэтому и все последующие функции монотонно убывающие. Поскольку каждая следующая функция – натуральный логарифм предыдущей, то её область определения – множество точек, где предыдущая функция положительна. Следовательно, область определения каждой следующей функции есть подмножество точек области определения предыдущей. Так как для $f_1(x)=\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)$ область определения – интервал $(0{,}1)$, то и все $f_n(x)$ не определены вне $(0{,}1)$. Так как функции монотонно убывающие, то для нахождения правой границы области определения нужно найти аргумент, при котором предыдущая функция обращается в 0 (затем она становится отрицательна и $f_{n+1}(x)$ уже не определена). Построим область определения функции $f_n(x)$.

$$f_1(x)=\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)=0\Leftrightarrow\ln\frac{1}{x}=1\Leftrightarrow\frac{1}{x}=e\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}\ \Rightarrow$$

$$D(f_2)=\left(0,\frac{1}{e}\right).$$

$$f_2(x)=\ln\left(f_1(x)\right)=\ln\left(\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right)=0\Leftrightarrow\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)=1\Leftrightarrow\ln\frac{1}{x}=e\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x}=e^e\Leftrightarrow x=\frac{1}{e^e}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(f_3)=\left(0,\frac{1}{e^e}\right).$$

$$f_3(x)=\ln(f_2(x))=\ln\left(\ln\left(\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right)\right)=0\Leftrightarrow\ln\left(\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right)=1\Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)=e\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ln\frac{1}{x}=\exp(e)\Leftrightarrow\frac{1}{x}=\exp(\exp(e))\Leftrightarrow x=\frac{1}{\exp(\exp(e))}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(f_4)=\left(0,\frac{1}{e^{e^e}}\right)=\left(0,\frac{1}{\exp(\exp(e))}\right).$$

$$f_n(x)=\ln(f_{n-1}(x))=\underbrace{\ln\left\{\ln\left\{\ldots\ln(\frac{1}{x})\right\}\right\}}_{n+1}=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x}=\underbrace{\exp\{\exp\{\ldots\exp(e)\}\}}_{n-1}\Leftrightarrow x=\left(\underbrace{\exp\{\exp\{\ldots\exp(e)\}\}}_{n-1}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow D(f_n)=\left(0,\left(\underbrace{\exp\{\exp\{\ldots\exp(e)\}\}}_{n-1}\right)^{-1}\right).$$

Итак, точная верхняя граница области определения функции $f_n(x)$:

$$a_n=\left(\underbrace{\exp\{\exp\{\ldots\exp(e)\}\}}_{n-1}\right)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^e} + \frac{1}{e^{e^e}} + \cdots + \left(\underbrace{\exp\{\exp\{\ldots\exp(e)\}\}}_{n-1} \right)^{-1} + \ldots .$$

Этот ряд можно оценить сверху с помощью геометрической прогрессии.

Для этого используем неравенство $e^x > x+1$, справедливое для любого $x > 0$ (графики $y = x+1$ и $y = e^x$ касаются только в точке $x = 0$), а также то, что $y = e^x$ возрастающая функция. Получим:

$$e > 2 \Rightarrow e^e > e^2 \Rightarrow \frac{1}{e^e} < \frac{1}{e^2}.$$

$$e^2 > 3 \text{ и } e^e > e^2 \Rightarrow e^{e^e} > e^{e^2} > e^3 \Rightarrow \frac{1}{e^{e^e}} < \frac{1}{e^3}$$

$e^{n-1} > n$ и

$$\underbrace{\exp\{\exp\{\ldots\exp(e)\}\}}_{n-2} > e^{n-1} \Rightarrow \underbrace{\exp\{\exp\{\ldots\exp(e)\}\}}_{n-1} > e^n$$

$$\Rightarrow \left(\underbrace{\exp\{\exp\{\ldots\exp(e)\}\}}_{n-1} \right)^{-1} < \frac{1}{e^n}$$

Итак, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ мажорируется геометрической прогрессией $1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \cdots + \frac{1}{e^n} + \ldots$ со знаменателем $q = \frac{1}{e} < 1$. Так как прогрессия сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится.

ЗАДАЧА 20. (Площадь поверхности + теория вероятностей).
Пусть падение небольшого метеорита в любой точке планеты равновозможно. Рассчитать при этом условии вероятность того, что метеорит упадёт на территории между параллелями φ_1 и φ_2 северной широты.
Примечание. В расчётах планету считать идеальным шаром.

РЕШЕНИЕ . Для того, чтобы вычислить вероятность падения метеорита между широтами φ_1 и φ_2, нужно вычислить, какая доля поверхности полусферы находится в данной полосе. Полная поверхность сферы $4\pi R^2$. Так как рассматривается северное полушарие, то широты φ_1 и φ_2 > 0.

Уравнение верхней полусферы $z = f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.
Формула площади поверхности для явно заданной функции: $S = \iint\limits_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dxdy$.

Не теряя общности, положим $\varphi_1 < \varphi_2$. Тогда область D в плоскости 0xy, над которой расположена искомая часть полусферы, это кольцо, определяемое максимальным радиусом $R\cos\varphi_1$ и минимальным $R\cos\varphi_2$, так как изначально взяли $\varphi_1 < \varphi_2$. Вычислим частные производные:

$$f'_x = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \quad \text{и} \quad f'_y = \frac{-2y}{2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Подставим их в формулу площади поверхности.

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy =$$

$$\iint\limits_D \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy.$$ Перейдём к полярным координатам.

Определитель Якоби в этом случае равен ρ .

$$\iint\limits_D \sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}}dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{R\cos\varphi_2}^{R\cos\varphi_1} \rho\sqrt{\frac{R^2}{R^2-\rho^2}}d\rho =$$

$$R\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{R\cos\varphi_2}^{R\cos\varphi_1} \frac{\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}d\rho =$$

$$-R\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{R\cos\varphi_2}^{R\cos\varphi_1} \frac{-2\rho}{2\sqrt{R^2-\rho^2}}d\rho = -R\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{R\cos\varphi_2}^{R\cos\varphi_1} \frac{d(R^2-\rho^2)}{2\sqrt{R^2-\rho^2}} =$$

$$-R\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{R^2-\rho^2}\Big|_{R\cos\varphi_2}^{R\cos\varphi_1} = -R\int\limits_0^{2\pi} d\varphi R\left(\sqrt{1-\cos^2\varphi_1}-\sqrt{1-\cos^2\varphi_2}\right)$$

$$= -R^2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\left(\sin\varphi_1-\sin\varphi_2\right) =$$

$R^2\left(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1\right)\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R^2\left(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1\right)$. Отношение этой величины к площади сферы:

$$\frac{2\pi R^2\left(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1\right)}{4\pi R^2} = \frac{1}{2}\left(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1\right).$$

Примечание. Если φ_1 *и* φ_2 *равны* 0^0 *и* $+90^0$*, то область охватывает северное полушарие, тогда Р=1/2.*

ОТВЕТ. $\frac{1}{2}\left(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1\right)$.

ЗАДАЧА 21. (Кратный интеграл + несобственный интеграл)

Вычислить кратный интеграл $\iint\limits_{R^2} \dfrac{dxdy}{\left(\sqrt{1+x^2+y^2}\right)^{\alpha}}$.

РЕШЕНИЕ. Интеграл по всей плоскости R^2 при вычислении в полярных координатах $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$

приводит к несобственному интегралу относительно переменной ρ.

$$I = \iint\limits_{R^2} \frac{dxdy}{\left(\sqrt{1+x^2+y^2}\right)^{\alpha}} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} \rho \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{1+\rho^2}\right)^{\alpha}} d\rho$$

Вычислим интеграл по переменной φ, в интеграле по переменной ρ выполним подведение под знак дифференциала.

$I = 2\pi \cdot \int\limits_0^{\infty} \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{d(1+\rho^2)}{\left(\sqrt{1+\rho^2}\right)^{\alpha}}$. Далее возможно два случая:

1) при $\alpha = 2$ получим

$$I = \pi \cdot \int\limits_0^{\infty} \frac{d(1+\rho^2)}{1+\rho^2} = \pi \cdot \lim_{B\to\infty} \int\limits_0^{B} \frac{d(1+\rho^2)}{1+\rho^2} = \pi \cdot \lim_{B\to\infty} \ln\left(1+\rho^2\right)\Big|_0^B = \infty .$$

2) при $\alpha \neq 2$ получим

$$I = \pi \cdot \int\limits_0^{\infty} \frac{d(1+\rho^2)}{\left(\sqrt{1+\rho^2}\right)^{\alpha}} = \pi \cdot \lim_{B\to\infty} \int\limits_0^{B} \left(1+\rho^2\right)^{-\frac{\alpha}{2}} d\left(1+\rho^2\right) =$$

$$\pi \cdot \frac{2}{2-\alpha} \cdot \lim_{B\to\infty} \left(1+\rho^2\right)^{1-\frac{\alpha}{2}}\Bigg|_0^B = = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{\alpha-2} & при \quad \alpha > 2 \\ \infty & при \quad \alpha < 2 \end{cases}$$

ОТВЕТ. $\iint\limits_{R^2} \dfrac{dxdy}{\left(\sqrt{1+x^2+y^2}\right)^{\alpha}} = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{\alpha-2} & при \quad \alpha > 2 \\ \infty & при \quad \alpha \leq 2 \end{cases}$

ЗАДАЧА 22. (Кратный интеграл)
Найти «объём» 4-мерного гипершара радиуса R в 4-мерном пространстве, то есть геометрическую меру множества, ограниченного гиперсферой, описанной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2$.

(Эквивалентная формулировка: С помощью тройного интеграла вычислить объём 4-мерного шара, заданного уравнением $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \le R^2$).

РЕШЕНИЕ.
Существует 2 различных способа решения.

Способ 1. Явно выразим четвёртую координату через первые три: $w = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}$. Область определения D явной функции - обычный 3-мерный шар радиуса R, а именно $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$.
Для нахождения указанного объёма нужно вычислить интеграл:
$$\iiint\limits_D 2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}\,dxdydz$$
(аналогично тому, как для вычисления объёма трёхмерного шара вычисляли бы $\iint\limits_S 2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$, где S - круг радиуса R).

Вычисление тройного интеграла по D может быть выполнено с использованием сферических координат в трёхмерном пространстве.
$$\iiint\limits_D 2\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}\,dxdydz =$$
$$2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^R \rho^2 \sin\theta \sqrt{R^2 - \rho^2}\,d\rho$$
Интграл по ρ вычисляется с помощью тригонометрической подстановки $\rho = R\sin t$. $2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^R \rho^2 \sqrt{R^2 - \rho^2}\,d\rho =$

$$2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{\pi/2} R^2 \sin^2 t \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t} \;\; R\cos t dt \;\; =$$

$$2 \cdot 2\pi \cdot \left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} R^4 \sin^2 t \sqrt{1 - \sin^2 t} \;\; \cos t dt \; =$$

$$8\pi R^4 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt \; = \; 8\pi R^4 \cdot \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin 2t}{2} \right)^2 dt \; =$$

$$2\pi R^4 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt \;\; = \; 2\pi R^4 \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt \; =$$

$$2\pi R^4 \cdot \left(\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} dt - \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 4t}{2} dt \right) = 2\pi R^4 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sin 4t}{8} \Bigg|_0^{\pi/2} \right) \; =$$

$$= \; \frac{1}{2} \pi^2 R^4 .$$

ОТВЕТ. $\frac{1}{2} \pi^2 R^4$.

Способ 2. Проинтегрировать величину объёма 3-мерного сечения гипершара от -R до R по какой-либо из переменных, например, x . Сечение имеет радиус $\sqrt{R^2 - x^2}$. Тогда объём трёхмерного шара такого радиуса $\frac{4}{3}\pi\sqrt{R^2 - x^2}^{\,3}$.

Треуется найти $\frac{4}{3}\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}^{\,3} dx \; = \; \frac{8}{3}\pi \int_0^{R} \sqrt{R^2 - x^2}^{\,3} dx$. Можно применить подстановку $x = R\sin t$ аналогично тому, что описано в прошлом методе.

$$\frac{8}{3}\pi \int_0^{R} \sqrt{R^2 - x^2}^{\,3} dx \; = \; \frac{8}{3}\pi \int_0^{\pi/2} \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t}^{\,3} R\cos t dt \; =$$

$$\frac{8}{3}\pi\int_0^{\pi/2} R^3\sqrt{1-\sin^2 t}^{\,3} R\cos t dt = \frac{8}{3}\pi R^4\int_0^{\pi/2}\cos^4 t dt =$$

$$\frac{8}{3}\pi R^4\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt \ \frac{2}{3}\pi R^4\int_0^{\pi/2}\left(1+2\cos 2t+\cos^2 2t\right)dt =$$

$$\frac{2}{3}\pi R^4\left(\frac{\pi}{2}+\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 4t}{2}dt\right) =$$

$$\frac{2}{3}\pi R^4\left(\frac{\pi}{2}+0+\frac{\pi}{4}+\frac{\sin 4t}{8}\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{2}{3}\pi R^4\,\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi^2 R^4 .$$

ОТВЕТ. $\frac{1}{2}\pi^2 R^4$.

ЗАДАЧА 23. (Дифференциальные уравнения)

Пусть движение материальной точки вдоль оси Ox задано дифференциальным уравнением $x''(t) = -x(t) - ax'(t)$, где a - коэффициент сопротивления среды ($a > 0$). При $t = 0$ точка имеет координату $x(0) = 1$ и скорость $x'(0) = v$, $v > 0$. Существует некоторое сопротивление, наименьшее из возможных, при котором не происходит процесс колебаний. Для этого сопротивления вычислите среднюю скорость точки в промежутке времени от $t = 0$ до момента максимального удаления от начала координат.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ 3

Рассмотрим дифференциальное уравнение в виде
$x''(t) + ax'(t) + x(t) = 0$. Характеристическим уравнением для этого линейного однородного дифф. уравнения является $r^2 + ar + 1 = 0$.

Дискриминант $D = a^2 - 4$.

При $a^2 - 4 > 0$, то есть $a > 2$, имеется два действительных корня, и решение вида $C_1 e^{-st} + C_2 e^{-mt}$.

При $a^2 - 4 < 0$, то есть при $a < 2$, только комплексные корни, тогда решение имеет вид $e^{-pt}(C_1 \cos qt + C_2 \sin qt)$ (это соответствует процессу затухающих колебаний). Тогда $a = 2$ наименьшее из возможных, когда корни действительные. Но при этом получается кратный корень, так как характеристическое уравнение имеет вид $r^2 + 2r + 1 = 0$, т.е. $(r+1)^2 = 0$.

Итак, кратный корень $r = -1$, в этом случае общее решение дифф. уравнения имеет вид $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}$.

Тогда производная $x'(t) = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{-t} - C_2 t e^{-t}$

Применим условия Коши, получаем $\begin{cases} C_1 & = 1 \\ -C_1 + C_2 & = v \end{cases}$, то есть

$C_1 = 1,\ C_2 = v + 1$, тогда

$$x(t) = e^{-t} + (v+1)te^{-t}, \qquad x'(t) = ve^{-t} - (v+1)te^{-t}$$

Теперь нам нужно найти такой момент времени, когда точка, запущенная со скоростью v, останавливается, то есть $x'(t) = 0$, при этом достигается максимальное расстояние от начала координат, обозначим его L.

$$\begin{cases} e^{-t} + (v+1)te^{-t} & = L \\ ve^{-t} - (v+1)te^{-t} & = 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения: $v-(v+1)t = 0$, то есть $t = \dfrac{v}{v+1}$.

Сложив равенства, получим $(1+v)e^{-t} = L$, то есть максимальное удаление

$L = (v+1)e^{-\frac{v}{v+1}}$. Но изначально точка была на расстоянии 1 от начала координат, то есть пройдено расстояние

$L-1 = (v+1)e^{-\frac{v}{v+1}} - 1$, причём, как уже было установлено, это произойдёт за время $t = \dfrac{v}{v+1}$. Тогда средняя скорость $\dfrac{L-1}{t}$ =

$\dfrac{v+1}{v}\left((v+1)e^{-\frac{v}{v+1}} - 1\right)$.

ОТВЕТ. Средняя скорость равна $\dfrac{v+1}{v}\left((v+1)e^{-\frac{v}{v+1}} - 1\right)$.

ЗАДАЧА 24 (Несобственный интеграл + ТФКП, вычеты).

Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^4 + 5x^2 + 4)^2}$

Указание. Можно воспользоваться вычетами в комплексной плоскости.

РЕШЕНИЕ. Обозначим $t = x^2$, и сначала найдём корни выражения $t^2 + 5t + 4 = 0$.

$t^2 + 5t + 4 = (t+1)(t+4)$, корни $t = -1$ и $t = -4$.

Таким образом, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^4 + 5x^2 + 4)^2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 4)^2} =$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+i)^2 (x-i)^2 (x+2i)^2 (x-2i)^2}$$

Интеграл по действительной оси можно найти с помощью суммы вычетов в особых точках верхней полуплоскости: $2\pi\, i \cdot \sum\limits_{z_k} \operatorname{Re} s(f)$, в

данном примере в верхней полуплоскости особые точки i и $2i$. Это полюсы 2-го порядка. Найдём интеграл с помощью суммы вычетов

функции $\frac{1}{(z+i)^2 (z-i)^2 (z+2i)^2 (z-2i)^2}$. а именно

$2\pi\, i \cdot \left(\operatorname{Re}\limits_{z=i} s\, f + \operatorname{Re}\limits_{z=2i} s\, f \right)$.

По правилам вычисления вычетов для полюсов 2 порядка, умножаем соответственно на $(z-i)^2$ либо $(z-2i)^2$ и вычисляем производную:

$$2\pi\, i \cdot \left(\left(\frac{1}{(z+i)^2 (z^2+4)^2} \right)' \Bigg|_{z=i} + \left(\frac{1}{(z+2i)^2 (z^2+1)^2} \right)' \Bigg|_{z=2i} \right) =$$

$$= 2\pi\, i \cdot \left(\frac{-2(z+i)(z^2+4)^2 - 2(z^2+4)2z(z+i)^2}{(z+i)^4 (z^2+4)^4} \Bigg|_{z=i} \right) +$$

$$2\pi\, i \cdot \left(\frac{-2(z+2i)(z^2+1)^2 - 2(z^2+1)2z(z+2i)^2}{(z+2i)^4 (z^2+1)^4} \Bigg|_{z=2i} \right) =$$

$$-4\pi\ i\cdot\left(\left.\frac{(z+i)(z^2+4)^2+(z^2+4)2z(z+i)^2}{(z+i)^4(z^2+4)^4}\right|_{z=i}\right)$$

$$-4\pi\ i\cdot\left(\left.\frac{(z+2i)(z^2+1)^2+(z^2+1)2z(z+2i)^2}{(z+2i)^4(z^2+1)^4}\right|_{z=2i}\right)=$$

$= \ -4\pi\ i\cdot\left(\frac{2i\cdot 3^2+3\cdot 2i(2i)^2}{(2i)^4(3)^4}+\frac{4i(-3)^2+(-3)4i(4i)^2}{(4i)^4(-3)^4}\right)$. Вынесем i и приведём подобные:

$$4\pi\cdot\left(\frac{2\cdot 9+3\cdot 2(-4)}{16\cdot 81}+\frac{4(-3)^2+(-3)4(-16)}{16^2\cdot 81}\right)=$$

$$4\pi\cdot\left(\frac{18-24}{16\cdot 81}+\frac{36+12\cdot 16}{16^2\cdot 81}\right)=\frac{4\pi}{81}\cdot\left(\frac{-6}{16}+\frac{36}{16^2}+\frac{12}{16}\right)=$$

$$\frac{4\pi}{81}\cdot\left(\frac{6}{16}+\frac{9}{4\cdot 16}\right)=\frac{\pi}{81}\cdot\left(\frac{24}{16}+\frac{9}{16}\right)=\frac{\pi}{81}\cdot\frac{33}{16}=\frac{11\pi}{27}\cdot\frac{1}{16}=\frac{11\pi}{432}.$$

ОТВЕТ. $\frac{11\pi}{432}$.

ЗАДАЧА 25. (Алгебра + теория вероятностей)

Рассмотрим множество всех квадратных матриц 2 порядка, элементами которых могут быть целые числа 0, 1, 2, 3. Пусть матрица, случайным образом взятая из этого множества, вырождена. Найти вероятность того, что при этом она не содержит нулей.

РЕШЕНИЕ. Данное множество состоит из $4^4 = 256$ различных матриц, так как в матрице 4 элемента и каждый из них может равновероятно принимать 4 разных значения.

Событие A – случайно взятая матрица вырождена.

Выдвинем гипотезы:

H_1 - матрица вырождена и содержит нулевые элементы (количество таких матриц обозначим N_1).

H_2 - матрица вырождена, но не содержит нулей (количество таких матриц обозначим N_2).

H_3 - матрица невырождена.

Условные вероятности: $P(A/H_1) = 1$, $P(A/H_2) = 1$, $P(A/H_3) = 0$.

Вычисляем количество вырожденных матриц N_1 и N_2 .

$N_1 = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 + M_6$, где

M_1 - количество матриц, у которых первая строка состоит из нулей. По правилу произведения $M_1 = 1 \cdot 3 \cdot 3 = 9$ (первую строку можно записать одним способом, выбрать каждый элемент второй строки тремя способами).

M_2 - количество матриц, у которых вторая строка состоит из нулей. $M_2 = 1 \cdot 3 \cdot 3 = 9$ (вторую строку можно записать одним способом, выбрать каждый элемент первой строки тремя способами).

M_3 - количество матриц, у которых первый столбец состоит из нулей. $M_3 = 1 \cdot 3 \cdot 3 = 9$ (первый столбец можно записать одним способом, выбрать каждый элемент второго столбца тремя способами).

M_4 - количество матриц, у которых второй столбец состоит из нулей. $M_4 = 1 \cdot 3 \cdot 3 = 9$ (второй столбец можно записать одним способом, выбрать каждый элемент первого столбца тремя способами).

M_5 - количество матриц, у которых три элемента нулевые. $M_5 = 3 \cdot 4 = 12$ (один ненулевой элемент можно выбрать тремя способами и поставить его на одно из четырёх мест).

M_6 - количество матриц, у которых все элементы равны нулю. $M_6 = 1$.

В вырожденной матрице второго порядка не может быть нуля, стоящего лишь на одном месте, иначе строки не пропорциональны, а значит, линейно независимы.

Итого: $N_1 = 9 + 9 + 9 + 9 + 12 + 1 = 49$.

$N_2 = M_7 + M_8 + M_9$

M_7 - количество матриц, у которых одинаковые строки, но строка состоит из различных элементов, не равных нулю. $M_7 = 3 \cdot 2 = 6$ (первый элемент строки можно записать тремя способами, второй – двумя).

M_8 - количество матриц, у которых одинаковые столбцы, но столбец состоит из различных элементов, не равных нулю. $N_8 = 3 \cdot 2 = 6$ (первый элемент столбца можно записать тремя способами, второй – двумя).

M_9 - количество матриц, у которых все элементы одинаковы, но среди них нет нулей. $M_9 = 3$. Итого: $N_2 = 6 + 6 + 3 = 15$.

Следовательно, $P(H_1) = \frac{49}{256}$, $P(H_2) = \frac{15}{256}$.

Априорная вероятность события *A:* $P(A) = \frac{49}{256} + \frac{15}{256} = \frac{64}{256}$.

Отсюда

$$P(H_2 / A) = \frac{P(H_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_2)P(A / H_2)}{P(A)} = \frac{15/256}{64/256} = \frac{15}{64}.$$

ОТВЕТ. $\frac{15}{64}$.

ЗАДАЧА 26 (Пределы + ряды).

Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[5]{5}\cdot\sqrt[25]{25}\cdot\ldots\sqrt[5^n]{5^n}$.

РЕШЕНИЕ.

$\sqrt[5]{5}\cdot\sqrt[25]{25}\cdot\ldots\sqrt[5^n]{5^n}\ldots = 5^{\frac{1}{5}}\cdot 25^{\frac{1}{25}}\cdot 125^{\frac{1}{125}}\cdot\ldots = 5^{\frac{1}{5}}\cdot 5^{\frac{2}{5^2}}\cdot 5^{\frac{3}{5^3}}\cdot\ldots$ Рассмотрим последовательность $a_n = \frac{1}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\ldots\frac{n}{5^n}$.

Она монотонно возрастает (так как каждое следующее слагаемое положительно). Так как $n < 2^n$ для всех $n \in N$, то

$a_n = \frac{1}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\ldots\frac{n}{5^n} < \frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\ldots\left(\frac{2}{5}\right)^n$, а это частичная сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии, для которой $S = \frac{2/5}{1-2/5} = \frac{2}{3}$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \frac{2}{3}$, то есть

последовательность ограничена сверху. Если она монотонно возрастает и ограничена сверху, значит, существует её предел.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A = \frac{1}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\ldots$ (при этом искомое произведение

$\sqrt[5]{5}\cdot\sqrt[25]{25}\cdot\ldots\sqrt[5^n]{5^n}\ldots = 5^{\frac{1}{5}}\cdot 5^{\frac{2}{5^2}}\cdot 5^{\frac{3}{5^3}}\cdot\ldots = 5^A$).

Тогда $\frac{A}{5} = \frac{1}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{3}{5^4}+\ldots$, разность:

$A-\frac{A}{5} = \left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\ldots\right)-\left(\frac{1}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{3}{5^4}+\ldots\right) = \frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\ldots$, а

это бесконечная геометрическая прогрессия, её сумма: $\frac{1/5}{1-1/5} = \frac{1}{4}$.

Так как $A-\frac{A}{5} = \frac{1}{4}$, то $A = \frac{5}{16}$, $5^A = 5^{\frac{5}{16}} = \sqrt[16]{3125}$.   ОТВЕТ. $5^{\frac{5}{16}} = \sqrt[16]{3125}$.

Содержание.