Министерство образования Российской Федерации
Томский государственный университет

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ И АЛГЕБРЕ

Томск – 2000

УДК 512; 517.
ББК В 512; В 161.

Исследования по математическому анализу и алгебре. Сборник науч. трудов // Издание Томского гоударственного университета. 2000. 202 с. 200 экз.

Научные редакторы: член–корр. РАО, проф. Александров И.А.,
проф. Крылов П.И.

В сборник включены работы по анализу и алгебре.
Для научных сотрудников, аспирантов и студентов старших курсов соответствующих специальностей.

Издание осуществлено при финансовой поддержке РФФИ, выполняемой по программе «Ведущие научные школы России», грант № 96-15-96095 «Исследования по комплексному анализу и алгебре».

УДК 512.55

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ Т-МОДУЛЕЙ и Т-КОЛЕЦ [1]

М.А. Приходовский
Томский государственный университет

Аннотация

Тензорные произведения играют важную роль в современной алгебре. Их строение еще полностью не изучено, в частности, для абелевых групп без кручения. Рассматривается строение тензорных произведений вида $A \otimes_s R$, где A_R – модуль над коммутативным кольцом с единицей, $h : S \to R$ – гомоморфизм колец.

1. Общие свойства

В [2] описано строение T-колец. T-кольцо определяется наличием естественного изоморфизма $R \otimes_S R \approx R, r \otimes s \to rs.$ Можно обобщить это понятие и перенести его на класс модулей.

Определение 1. Пусть S, R – коммутативные кольца с единицей, A_S – правый R-модуль. $h : S \to R$ – кольцевой гомоморфизм. A_R будем называть обобщенным T-модулем относительно гомоморфизма h, или $T(h)$-модулем, если существует естественный изоморфизм

$$A \otimes_S \approx A \otimes_R R, \qquad a \otimes_S r \to a \otimes_R r.$$

Положим $A_R = R_R$. Кольцо R будем называть обобщенным T-кольцом, если R_R является обобщенным T-модулем, то есть

$$R \otimes_S R \approx R \otimes_R R.$$

Известно, что существуют естественные изоморфизмы

$$A \otimes_R R \approx A \approx A \otimes_S S.$$

Поэтому можно заменить определения обобщенных Т-модулей и Т-колец эквивалентными определениями, рассматривая вместо естественных изоморфизмов

$$A \otimes_S R \approx A \otimes_R R \quad \text{и} \quad R \otimes_S R \approx R \otimes_R R,$$

соответственно

---

[1] Работа поддержана РФФИ, грант 97-01-00795.

$$A \otimes_S R \approx A \quad \text{и} \quad R \otimes_S R \approx R.$$

Аналогичные конструкции встречались в работе [1]. Класс обобщенных (относительно h) T-модулей обозначим $T(S, R, h)$.

Покажем, что можно считать h мономорфизмом и рассматривать вместо S подкольцо $h(S)$ в R.

Пусть h – не инъективный гомоморфизм, то есть $Ker(h) \neq 0$.. Обозначим $S_1 = Ker(h)$. Для любого $s \in S_1 : h(s) = 0$. s. S_1 – идеал в S: если $s' \in S_1, s'' \notin S_1$, s', то $h(s's'') = h(s')h(s'') = 0 \cdot h(s'') = 0$. Пусть дан модуль A_R. Тогда на группе A существует структура S-модуля (A_S), которая задается операцией $a \circ s := a \cdot h(s)$. Кольцо R можем рассматривать как $S-S$-бимодуль ${}_sR_s$,

где $s \circ r = h(s) \cdot r, r \circ s = r \cdot h(s)$. Если $s \in S_1$,, то $a \circ s = a \cdot h(s) = 0$, s $s \circ r$ $\circ$ r = $h(s)$ • r = 0. Пусть $S_0 = S / Ker(h) = S / S_1$. Тогда $A \otimes_S R = A \otimes_{S_0} R$,, так как все элементы вида $(as,r) - (a,sr)$ при $s \in S_1$ равны 0. Поэтому в дальнейшем будем отождествлять S с $Im(h)$, т.е. с некоторым подкольцом кольца R.

Отображения

$$\rho_R : A \to A \otimes_S R \quad \text{и} \quad h_A^* : A \otimes_S S \to A \otimes_S R$$

являются инъективными,

где $\rho_R(a) = a \otimes 1_R, \rho_S = h_A^* \circ \rho_S : A \to A \otimes_S S$ – естественный изоморфизм.

Отображения ρ_A и h_A^* являются сюръективными тогда и только тогда, когда A_R – обобщенный $T(h)$-модуль (это видно из определения 1).

Теорема 2. (Критерий обобщенного T-модуля).

Пусть $h : S \to R, A_R$ – правый R-модуль. A_R является обобщенным T-модулем тогда и только тогда, когда

$$A \otimes_S R / Im(h) = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to S \xrightarrow{h} R \to R / h(S) \to 0.$$

Заметим, что $h(S)$ – не идеал кольца R, поэтому $R/h(S)$ рассматривается просто как левый S-модуль ${}_S(R / h(S))$.

Рассмотрим индуцированную точную последовательность:

$$A\otimes_S S\xrightarrow{h_A^*} A\otimes_S R\to A\otimes_S R/h(S)\to 0.$$

Модуль A_R является обобщенным T-модулем, если и только если h_A^* сюръективно. А для этого необходимо и достаточно, чтобы $A\otimes_S R/Im(h)=0$.

Если A_R не является обобщенным T-модулем, то между тензорными произведениями $A\otimes_R R$ и $A\otimes_S R$ нет естественного изоморфизма. Рассмотрим соотношение между ними в этом случае.

Теорема 3. Пусть A – R-модуль, $h: S\to R$ – гомоморфизм колец. Естественный эпиморфизм

$$\pi: A\otimes_S R\to A\otimes_R R,\ \ \pi(a\otimes_S s)=ar\otimes_R 1_R,$$

является расщепляющим, то есть $Ker(\pi)$ выделяется прямым слагаемым, и существует естественный изоморфизм:

$$A\otimes_S R\approx A\otimes_R R\oplus A\otimes_S R/h(S).$$

Доказательство. Построим гомоморфизм ρ, обратный к π. Полагаем $\rho(a\otimes_R r)=\rho(ar\otimes_R 1_R)$. Учитывая, что $\pi(a\otimes_S r)=ar\otimes_R 1_R$, получаем:

$$\pi(\rho(a\otimes_R r))=\pi(ar\otimes_S 1_R)=ar\otimes_R 1_R=a\otimes_R r.$$

Следовательно, $\pi\rho$ действует как тождественный автоморфизм на тензорном произведении $A\otimes_R R$. Эпиморфизм π является расщепляющим, $Ker(\pi)$ – прямое слагаемое в $A\otimes_S R$, и имеет место естественный изоморфизм

$$A\otimes_S R\approx A\otimes_R R\oplus Ker(\pi).$$

По теореме 2 A_R является обобщенным T-модулем (т.е. $A\otimes_S R\approx A\otimes_R R$), тогда и только тогда, когда $A\otimes_S R/h(S)=0$. Можно отождествить естественным образом $Ker(\pi)$ с $A\otimes_S R/h(S)$.

Таким образом,

$$A\otimes_S R\approx A\otimes_R R\oplus A\otimes_S R/h(S).$$

Утверждение 4. Кольцо R является (обобщенным) T-кольцом тогда и только тогда, когда каждый модуль A_R является (обобщенным) T-модулем.

Доказательство. Пусть R – T-кольцо, то есть $R \otimes_S R \approx R$ – естественный изоморфизм. Тогда:

$$A \otimes_R R \approx A \otimes_R (R \otimes_S R) \approx (A \otimes_R R) \otimes_S R \approx A \otimes_S R.$$

Обратно, пусть каждый R-модуль является $T(h)$-модулем. R_R также является T-модулем, следовательно, $R \otimes_S R \approx R \otimes_R R$.

Модули с условием $A \otimes_Z R \approx A \otimes_R R$, рассмотренные в [6], будем называть классическими T-модулями. Они связаны с кольцевым гомоморфизмом $e_R : Z \to R$.

Утверждение 5. Если A_R – классический T-модуль, то он является обобщенным $T(h)$-модулем для любого $h : S \to R$.

Доказательство. Имеем:

$$A \otimes_S R = (A \otimes R) / < (a \circ s, r) - (a, s \circ r) >, s \in S,$$

$$A \otimes_R R = (A \otimes R) / < (as, r) - (a, sr) >, s \in R.$$

Если $A \otimes R \approx A \otimes_R R$, то для всех $s \in R : (as, r) - (a, sr) = 0$. Значит, и для каждого $s \in S : (a \circ s, r) - (a, s \circ r) = 0$.

Откуда $A \otimes_S R \approx A \otimes R \approx A \otimes_R R$.

В частности, классические T-кольца являются обобщенными для любого подкольца S в R.

2. Свойства замкнутости классов обобщенных $T(h)$-модулей

Критерий (теорема 2) обобщенного T-модуля позволяет исследовать свойства классов $T(S, R, h)$. Будем рассматривать фиксированное кольцо $S, h : S \to R$ – мономорфизм.

Утверждение 6. Прямая сумма обобщенных $T(h)$-модулей является обобщенным $T(h)$-модулем.

Доказательство. Пусть A_i – R-модули и $A = \oplus_{i \in I} A_i$. Согласно условия, для всех $i \in I : A_i \otimes_S R / h(S) = 0.$. Следовательно,

$$A \otimes_S R/h(S) = (\oplus_{i\in I} A_i) \otimes_S R/h(S) \approx \oplus_{i\in I}(A_i \otimes_S R/h(S)) = 0.$$

Утверждение 7.

1. Фактормодуль *T(h)*-модуля есть *T(h)*-модуль.
2. Если ${}_S(R/h(s))$ – плоский модуль, то каждый подмодуль *T*(*h*)-модуля есть *T*(*h*)-модуль.

Доказательство. Пусть A_R – модуль, B – подмодуль в A. Точная последовательность

$$0 \to B_R \to A_R \to (A/B)_R \to 0$$

индуцирует точную последовательность

$$B \otimes_S R/h(S) \to A \otimes_S R/h(S) \xrightarrow{\gamma} (A/B) \otimes_S R/h(S) \to 0.$$

Здесь γ – эпиморфизм, а по условию и теореме 2 $A \otimes_S R/h(S) = 0$. Следовательно, $(A/B) \otimes_S R/h(S) = 0$. По теореме 2 *A/B* – обобщенный *T*(*h*)-модуль.

Пусть теперь ${}_S(R/h(S))$ – плоский модуль. Тогда индуцированная точная последовательность имеет следующий вид

$$0 \to B \otimes_S R/h(S) \xrightarrow{\delta} A \otimes_S R/h(S) \xrightarrow{\gamma} (A/B) \otimes_S R/h(S) \to 0.$$

Таким образом, δ – мономорфизм, причем последовательность

$$0 \to B \otimes_S R/h(S) \xrightarrow{\delta} 0$$

точна. По теореме 2 подмодуль *B* является *T*(*h*)-модулем.

Утверждение 8. Каждое прямое слагаемое обобщенного *T*(*h*)-модуля является обобщенным *T*(*h*)-модулем.

Доказательство. Пусть A_R – модуль и $A = B \otimes C$. Тогда

$$0 = A \otimes_S R/h(S) = (B \oplus C) \otimes_S R/h(S) \approx$$
$$\approx (B \otimes_S R/h(S)) \oplus (C \otimes_S R/h(S)).$$

Следовательно, $B \otimes_S R/h(S) = 0$ и $C \otimes_S R/h(S)$, то есть каждое прямое слагаемое модуля *A* по теореме 2 является *T*(*h*)-модулем.

Утверждение 9. Пусть $A_R, {}_RB$ – модули, $h: S \to R$ – кольцевой гомоморфизм. Для существования естественного изоморфизма

$$(A_S) \otimes_S ({}_SB) \approx A \otimes_R B$$

достаточно, чтобы хотя бы один из этих модулей был обобщенным $T(h)$-модулем.

Доказательство. Если A_R – правый обобщенный $T(h)$-модуль, то $A \otimes_S R \approx A \otimes_R R$. Рассмотрим последовательность естественных изоморфизмов:

$$A \otimes_R B \approx (A \otimes_S R) \otimes_R B \approx A \otimes_S (R \otimes_R B) \approx A \otimes_R B.$$

Если ${}_R B$ – левый $T(h)$-модуль, то строится цепочка естественных изоморфизмов:

$$A \otimes_S B \approx (A \otimes_R R) \otimes_S B \approx A \otimes_R (R \otimes_S B) \approx A \otimes_R B.$$

Утверждение 10. Если A_R, B_R – правые R-модули, $A_R \in T(S,R,h)$, то $Hom_S(A,B) \approx Hom_R(A,B)$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность естественных изоморфизмов:

$$Hom_R(A_R,B_R) \approx Hom_R(A \otimes_R R, B_R) \approx Hom_R(A \otimes_S R, B_R) \approx$$
$$\approx Hom_S(A, Hom_R(R,B)) \approx Hom_S(A,B).$$

Литература

1. *Silver L.* Noncommutative localizations and applications// Journal of algebra. 1967. V. 7. P. 44–76.
2. *Bowshell R.A.,Schultz P.* Unital rings whose additive endomorphism commute // Math. Ann. 1977. V. 228. P. 197–214.
3. *Pierse R.S.* E-modules // Contemporary Math. l989. V. 89. P. 221–240.
4. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. В 2 т. М.: "Мир", 1971. Т. 1.
5. *Фейс К.* Алгебра: кольца,модули и категории. В 2 т.М.:"Мир", 1977. Т. 1.
6. *Приходовский М.А.* Т-модули и их кольца эндоморфизмов // Исследования по математическому анализу и алгебре. Томск, 1998. С. 196–200.