

ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ МАТРИЦ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ И КОНЕЧНОМЕРНЫХ АЛГЕБР

В работе рассматривается метод описания конечномерных алгебр и систем гиперкомплексных чисел с помощью пространственных матриц. Многомерные матрицы могут являться универсальным математическим аппаратом для исследования строения и свойств конечномерных алгебр.

Теория многомерных (в основном трёхмерных) матриц находила применение главным образом для классификации алгебраических форм [1, 2]. В частности, в [1] рассматривается классификация трилинейных и двойничных кубических форм. Однако определяя билинейное умножение, обычно задают либо определяющие соотношения, например для системы кватернионов:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j,$$

либо таблицу умножения базисных единиц. Но билинейное умножение векторов n -мерного пространства может быть задано с помощью трёхмерной матрицы аналогично тому, как линейные операторы задаются обычными двумерными матрицами. Пусть фиксирован базис пространства e_1, \dots, e_n . Произведение каждой пары базисных векторов $e_i e_j$ определено как $a_{ijl}e_1 + \dots + a_{ijn}e_n$. Тогда существует n^2 векторов и n^3 структурных констант, которые удобно расположить в виде трёхмерной числовой матрицы. С одной стороны, каждое вертикальное сечение данной объёмной матрицы (при фиксированном первом или втором индексе) есть квадратная матрица линейного оператора в пространстве R^n , действующего как левое или правое умножение на фиксированный базисный вектор e_i . С другой стороны, всякое горизонтальное сечение (при фиксированном третьем индексе) можно рассматривать как некоторую матрицу билинейной формы.

Умножение векторов $a \cdot b$ в алгебре, задаваемой матрицей с элементами α_{ijk} , может быть записано следующим образом:

$$\left((a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} \alpha_{111} & \dots & \alpha_{1n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n11} & \dots & \alpha_{nn1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right), \dots, \\ \left((a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} \alpha_{11n} & \dots & \alpha_{1nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1n} & \dots & \alpha_{nnn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right) = \\ = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij1} a_i b_j, \dots, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ijn} a_i b_j \right).$$

Получаем возможность, исследуя пространственную числовую матрицу, определители её двумерных сечений и другие ассоциированные с этой матрицей величины, изучить свойства той или иной конечномерной алгебры, в частности, системы гиперкомплексных чисел. Каждая числовая система, например комплексных чисел (рис. 1),

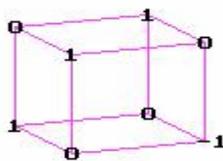


рис. 1

кватернионов определяется некоторым билинейным оператором, который будем задавать пространственной матрицей (рис. 2).

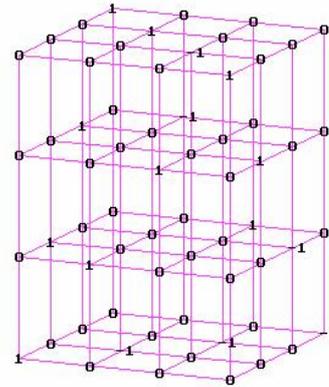


рис. 2

Векторное умножение в трёхмерном пространстве также может быть задано матрицей (рис. 3),

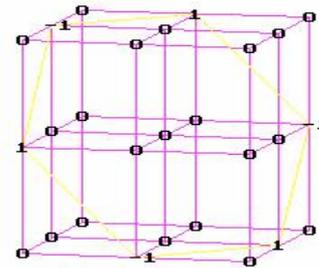


рис. 3

а тот факт, что в системе отсутствует единичный элемент по умножению, отражается определённым образом на строении этой матрицы – она не является подобной никакой пространственной матрице, содержащей единичные матрицы в качестве сечений при фиксированном первом либо втором индексе. отождествляя оператор с некоторой матрицей, свойства системы гиперкомплексных чисел могут быть исследованы с помощью исследования её строения, так как она однозначно определяет операцию умножения в системе. Линейное пространство n -мерных алгебр изоморфно линейному пространству трёхмерных матриц порядка n .

Матрица линейного оператора двумерна, матрица билинейного оператора умножения трёхмерна. Матричный метод описания действия оператора можно распространить на m -арные операции. Всякий m -арный полилинейный оператор n -мерного пространства может быть задан матрицей размерности $m+1$ порядка n . Если фиксировать один из векторов, то получаем $(m-1)$ -арный полилинейный оператор, матрица которого будет линейной комбинацией вертикальных сечений матрицы исходного оператора. Заметим, что для случая $m=1$, т.е. обычных (унарных) линейных операторов векторных

пространств, матричный аппарат применяется изначально, в то же время для бинарных – используется так называемая «таблица умножения» мнимых единиц. В данной статье ограничимся рассмотрением бинарных операций.

Такие свойства, как коммутативность, ассоциативность, наличие делителей нуля, а также единицы по умножению (нейтрального элемента операции) определённым образом отражаются на строении матрицы. Так, если единичный элемент является одним из базисных, то вертикальные сечения пространственной матрицы будут единичными матрицами. Наличие делителей нуля для бинарной операции взаимосвязано с наличием ненулевого ядра линейного оператора, действующего как умножение на фиксированный элемент при данной бинарной операции. Рассматривая действие различных операций с помощью единого матричного подхода, возможно установить взаимосвязь между такими понятиями, как, например, инвариантные подпространства линейного оператора и идеалы алгебры. Идеал конечномерной алгебры является инвариантным подпространством для всех операторов, индуцированных фиксированными векторами. Действительно, если $rI \subseteq I$ для всякого $r \in R^n$, то I является инвариантным подпространством оператора, действующего как умножение на r .

Строение матрицы, задающей бинарную операцию, зависит от выбора базиса. Пусть A – матрица билинейной операции в базисе e_1, \dots, e_n . Матрица A состоит из координат произведений всевозможных пар векторов e_i, e_j относительно исходного базиса. Тогда матрица B этой операции относительно нового базиса f_1, \dots, f_n состоит из координат всех произведений вида $f_i f_j$, выраженных в новом базисе f_1, \dots, f_n . В связи с этим понятие подобия матриц распространяется с плоских матриц на многомерные. Пусть матрица в старом базисе состоит из структурных констант α_{ijk} , в новом базисе – β_{ijk} , двумерная матрица C перехода к новому базису. Зная матрицу умножения и новый базис, в новом базисе её можно вычислить, решив n^2 систем уравнений для каждого i, j от 1 до n :

$$\begin{cases} c_{11}\beta_{ij1} + \dots + c_{n1}\beta_{ijn} = \sum_{r=1}^n \sum_{t=1}^n c_{is}c_{jt}\alpha_{rt1}, \\ \dots \\ c_{1n}\beta_{ij1} + \dots + c_{nn}\beta_{ijn} = \sum_{r=1}^n \sum_{t=1}^n c_{is}c_{jt}\alpha_{rtn}. \end{cases}$$

Кроме того, преобразование базиса может приводить к упрощению структуры трёхмерной матрицы.

Рассмотрим некоторые свойства конечномерной алгебры и их взаимосвязь со строением трёхмерной матрицы данной алгебры.

Очевидно, что конечномерная алгебра коммутативна тогда и только тогда, когда $e_i e_j = e_j e_i$. Это эквивалентно тому, что для всяких $i, j = 1, \dots, n$ выполнено условие $\alpha_{ilk} = \alpha_{jlk}$, то есть матрица A симметрична относительно диагонального сечения:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{111} & \dots & \alpha_{n11} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{11n} & \dots & \alpha_{nnn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим взаимосвязь между строением матрицы конечномерной алгебры и существованием единицы по умножению.

Теорема 1. Для билинейной операции, заданной матрицей A с элементами α_{ijk} , существует левый единичный элемент тогда и только тогда, когда следующая система из n^2 уравнений с n неизвестными является совместной и определённой:

$$\begin{cases} \alpha_{111}\varepsilon_1 + \dots + \alpha_{n11}\varepsilon_n = 1, \\ \dots \\ \alpha_{1n1}\varepsilon_1 + \dots + \alpha_{nn1}\varepsilon_n = 0, \\ \dots \\ \alpha_{11n}\varepsilon_1 + \dots + \alpha_{n1n}\varepsilon_n = 0, \\ \dots \\ \alpha_{1nn}\varepsilon_1 + \dots + \alpha_{nnn}\varepsilon_n = 1. \end{cases}$$

В этом случае единичным элементом билинейной операции умножения является вектор $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$.

Доказательство. Пусть в пространстве R^n существует левый единичный элемент по умножению. Обозначим этот элемент ε . Для всякого $x \in R^n$ верно $\varepsilon x = x$. Запишем произведение εx с помощью элементов трёхмерной матрицы, задающей умножение в данной алгебре. Получим равенство векторов:

$$\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij1}\varepsilon_i x_j, \dots, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ijn}\varepsilon_i x_j \right) = (x_1, \dots, x_n),$$

которое выполняется для всех (x_1, \dots, x_n) . Из совпадения первых координат этих векторов получаем

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_{i11}\varepsilon_i \right) x_1 + \dots + \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{in1}\varepsilon_i \right) x_n = x_1,$$

что эквивалентно

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{i11}\varepsilon_i = 1, \sum_{i=1}^n \alpha_{i21}\varepsilon_i = 0, \dots, \sum_{i=1}^n \alpha_{in1}\varepsilon_i = 0.$$

Эти равенства составляют первые n уравнений системы с неизвестными ε_i . Аналогичным образом, сравнивая остальные координаты, получаем в итоге систему из n^2 уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_{111}\varepsilon_1 + \dots + \alpha_{n11}\varepsilon_n = 1, \\ \dots \\ \alpha_{1n1}\varepsilon_1 + \dots + \alpha_{nn1}\varepsilon_n = 0, \\ \dots \\ \alpha_{11n}\varepsilon_1 + \dots + \alpha_{n1n}\varepsilon_n = 0, \\ \dots \\ \alpha_{1nn}\varepsilon_1 + \dots + \alpha_{nnn}\varepsilon_n = 1. \end{cases}$$

Заметим, что если данная алгебра коммутативна, то найденный таким образом элемент $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ является единицей алгебры. Если алгебра некоммутативна, то для того чтобы $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ был единичным элементом, необходимо также чтобы он был правой единицей, критерий существования которой доказывается аналогично с помощью системы

$$\begin{cases} \alpha_{111}\varepsilon_1 + \dots + \alpha_{1n1}\varepsilon_n = 1, \\ \dots \\ \alpha_{n11}\varepsilon_1 + \dots + \alpha_{nn1}\varepsilon_n = 0, \\ \dots \\ \alpha_{11n}\varepsilon_1 + \dots + \alpha_{1nn}\varepsilon_n = 0, \\ \dots \\ \alpha_{n1n}\varepsilon_1 + \dots + \alpha_{nnn}\varepsilon_n = 1. \end{cases}$$

Таким образом, координаты вектора, умножение на который будет тождественным линейным оператором (если он существует), можно вычислить следующим образом:

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{121} & \cdots & \alpha_{1n1} \\ 0 & \alpha_{221} & \cdots & \alpha_{2n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_{n21} & \cdots & \alpha_{nn1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{111} & \alpha_{121} & \cdots & \alpha_{1n1} \\ \alpha_{211} & \alpha_{221} & \cdots & \alpha_{2n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n11} & \alpha_{n21} & \cdots & \alpha_{nn1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{122} & \cdots & \alpha_{1n2} \\ 1 & \alpha_{222} & \cdots & \alpha_{2n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_{n22} & \cdots & \alpha_{nn2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12n} & \cdots & \alpha_{1nn} \\ 0 & \alpha_{22n} & \cdots & \alpha_{2nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_{n2n} & \cdots & \alpha_{n nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{112} & \alpha_{122} & \cdots & \alpha_{1n2} \\ \alpha_{212} & \alpha_{222} & \cdots & \alpha_{2n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n12} & \alpha_{n22} & \cdots & \alpha_{nn2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11n} & \alpha_{12n} & \cdots & \alpha_{1nn} \\ \alpha_{21n} & \alpha_{22n} & \cdots & \alpha_{2nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1n} & \alpha_{n2n} & \cdots & \alpha_{n nn} \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_n = \begin{pmatrix} \alpha_{111} & \alpha_{121} & \cdots & 1 \\ \alpha_{211} & \alpha_{221} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n11} & \alpha_{n21} & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{111} & \alpha_{121} & \cdots & \alpha_{1n1} \\ \alpha_{211} & \alpha_{221} & \cdots & \alpha_{2n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n11} & \alpha_{n21} & \cdots & \alpha_{nn1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{112} & \alpha_{122} & \cdots & 0 \\ \alpha_{212} & \alpha_{222} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n12} & \alpha_{n22} & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11n} & \alpha_{12n} & \cdots & 0 \\ \alpha_{21n} & \alpha_{22n} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1n} & \alpha_{n2n} & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{112} & \alpha_{122} & \cdots & \alpha_{1n2} \\ \alpha_{212} & \alpha_{222} & \cdots & \alpha_{2n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n12} & \alpha_{n22} & \cdots & \alpha_{nn2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11n} & \alpha_{12n} & \cdots & \alpha_{1nn} \\ \alpha_{21n} & \alpha_{22n} & \cdots & \alpha_{2nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1n} & \alpha_{n2n} & \cdots & \alpha_{n nn} \end{pmatrix}.$$

Теперь рассмотрим строение трёхмерной матрицы, задающей умножение, если в качестве одного из векторов базиса взять элемент ε . Пусть $\varepsilon = e_1$. Тогда умножение на e_1 является тождественным оператором и соответственно, вертикальное сечение трёхмерной матрицы, полученное при фиксировании первого индекса $i=1$, будет единичной матрицей. Когда элемент ε является одновременно левой и правой единицей, два вертикальных сечения, а именно при $i=1$ и $j=1$, будут являться единичными двумерными матрицами. Таким строением, например, обладают матрицы системы комплексных чисел и кватернионов (рис. 1 и 2).

Рассмотрим взаимосвязь между наличием ненулевого идеала алгебры и строением её трёхмерной матрицы.

Теорема 2. Если алгебра содержит ненулевой идеал, то матрица, задающая умножение в этой алгебре, подобна матрице, вертикальные сечения которой содержат нулевые строки.

Доказательство. Пусть подпространство I является правым идеалом алгебры, заданной матрицей A . Обозначим через f_1, \dots, f_m базис подпространства I . Пусть эти элементы являются первыми m элементами нового базиса пространства R^n . Для всякого $x \in R^n$ и $r \in I$ верно $xr \in I$. Следовательно, при умножении на любой из элементов f_1, \dots, f_m образ будет являться линейной комбинацией элементов f_1, \dots, f_m . Отсюда следует, что умножение вида (x, f_i) является вырожденным оператором, образ которого есть линейная оболочка векторов f_1, \dots, f_m . Матрица этого оператора содержит хотя бы одну нулевую строку, в то же время эта матрица есть вертикальное сечение трёхмерной матрицы, задающей конечномерную алгебру.

Текст исследования опубликован также на сайте <http://alg1992.narod.ru>

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколов Н.П. Пространственные матрицы и их приложения. М.: Физматлит, 1960.
2. Соколов Н.П. Введение в теорию многомерных матриц. Киев, 1972.
3. Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973.
4. Приходовский М.А. Применение пространственных матриц к исследованию гиперкомплексных чисел, конечномерных алгебр и полилинейных операций // Тез. Междунар. конф. «Число, время, относительность», М., 10–13 августа 2004. М., 2004. С. 32–33.

Статья представлена кафедрой алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 27 мая 2004 г.