ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2009 Математика и механика № 2(6)

УДК 512.57

М.А. Приходовский

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ *n*-АРНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ

В работе исследуются некоторые свойства n-арных алгебраических операций, в частности, вводится понятие бинарной разложимости. Исследуется бинарная разложимость n-арного векторного произведения.

Ключевые слова: *группа*, *модуль*, *эндоморфизм*, *n-арная операция*, *векторное умножение*, *кватернионы.*

С каждой абелевой группой A естественным образом ассоциированы следующие объекты: кольцо эндоморфизмов $E(A)$ и группа умножений $\mathrm{Mult}(A)$. Множество всех унарных отображений образует кольцо, в то время как множество всех бинарных операций образует только группу по сложению (композиция бинарных операций не является бинарной операцией). Наиболее известные и исследуемые классы алгебраических структур, такие как группа, кольцо, поле, модуль связаны с бинарными алгебраическими операциями [1]. Представляет интерес обобщение различных свойств этих структур для случая n-арных операций. Отметим, что при рассмотрении множества с n-арной алгебраической операцией некоторые понятия, свободно применяемые для бинарных операций (такие, как коммутативность, нейтральный элемент, обратный элемент, делимость) либо теряют смысл, либо их необходимо обобщать. В общем случае будем обозначать n-арную операцию над элементами $a_1,...,a_n \in A$ через $\omega(a_1,...,a_n)$. Наиболее естественно переносится понятие дистрибутивности операции относительно сложения:

$$\omega(a_1,...,a'_k + a''_k,...,a_n) = \omega(a_1,...,a'_k,...,a_n) + \omega(a_1,...,a''_k,...,a_n) \ \ \forall k = 1,...,n .$$

Операция ω называется коммутативной *относительно перестановки* $(i_1,...,i_n)$, если выполняется равенство $\omega(a_1,...,a_n) = \omega(a_{i_1},...,a_{i_n})$. Так как при $n = 2$ существует только две перестановки, а именно (1 2) и (2 1), то для коммутативности в бинарном случае требуется выполнение единственного равенства: $ab=ba$. Операция ω называется антикоммутативной, если $\omega(a_1,...,a_n) = -\omega(a_{i_1},...,a_{i_n})$ для всякой нечётной перестановки $(i_1,...,i_n)$ и $\omega(a_1,...,a_n) = \omega(a_{i_1},...,a_{i_n})$ для всякой чётной перестановки. Это означает, что n-арная операция антикоммутативна относительно любой транспозиции, то есть $\omega(a_1,...,a_i,...,a_j,...,a_n) = -\omega(a_1,...,a_j,...,a_i,...,a_n)$. Нетрудно показать, что в этом случае при совпадении каких-либо двух элементов результат операции равен 0. Действительно, при $a_i = a_j$ имеем

$$\omega(a_1,...,a_i,...,a_i,...,a_n) = -\omega(a_1,...,a_i,...,a_i,...,a_n) = 0 .$$

Нейтральный элемент $e \in A$ определяется условием

$$\omega(a,e,e) = \omega(e,a,e) = \omega(e,e,a) = a \ \ \forall a \in A .$$

Элементы $a_1,...,a_n$ являются делителями нуля (образуют нильпотентную систему), если $\omega(a_1,...,a_n) = 0$.

Ещё более неоднозначны возможные обобщения делимости. Делимость можно определить как существование дополняющего элемента x для заданных системы $a_1,...,a_{n-1}$ и элемента b, такого, что $\omega(a_1,...,a_{n-1},x)=b$. Многие свойства групп с n-арной операцией (n-арных, или полиадических групп) описаны в [4].

Для заданной абелевой группы можем рассматривать множество всех n-арных умножений, а также вводить действия над ними. Так, сложение n-арных умножений определяется естественным образом по правилу

$$(\omega_1+\omega_2)(a_1,...,a_n)=\omega_1(a_1,...,a_n)+\omega_2(a_1,...,a_n),$$

эта операция является коммутативной, а также существует нулевое n-арное умножение и противоположное, а именно $-\omega$. Таким образом, множество всех n-арных умножений образует абелеву группу. Обозначим данную группу $M_n(A)$.Рассмотрим подробнее $M_3(A)$. Для этой группы можно установить следующие изоморфизмы:

$$M_3(A)\cong \mathrm{Hom}(A\otimes A\otimes A,A)\cong \mathrm{Hom}(A,\mathrm{Hom}(A\otimes A,A))\cong \mathrm{Hom}(A,\mathrm{Mult}(A)).$$

Сказанное обобщается и для n-арных операций: $M_n(A)\cong \mathrm{Hom}(A,M_{n-1}(A))$.

Таким образом, всякой абелевой группе A соответствует бесконечная последовательность абелевых групп:

$$\{E(A)^+,\mathrm{Mult}(A),M_3(A)...,M_n(A),...\}.$$

На всякой абелевой группе естественным образом определяется структура модуля над кольцом $E(A)$, а само кольцо эндоморфизмов рассматривается как левый регулярный модуль ${}_{E(A)}E(A)$. Таким образом, существует группа всех $E(A)$-модульных гомоморфизмов из A в $E(A)$, обозначаемая $\mathrm{Hom}_{E(A)}(A,E(A))$, являющаяся подгруппой группы $\mathrm{Hom}(A,E(A))$, которая в свою очередь изоморфна группе умножений.

Если на A существует структура $T(E(A))$-модуля, то все гомоморфизмы из A являются $E(A)$-модульными [2], что означает совпадение подгруппы $\mathrm{Hom}_{E(A)}(A,E(A))$ с группой $\mathrm{Mult}(A)$.

Аналогично тому, как для бинарного умножения $\mu(x,y)$ при фиксировании одного элемента получается эндоморфизм $\mu_x(y):A\to A$, для тернарной операции, фиксируя элемент a, получаем бинарное умножение, аргументами которого являются два оставшихся элемента, а при фиксировании двух аргументов – эндоморфизм группы А. Таким образом, можно рассматривать отображение $a\to\omega_a\in\mathrm{Mult}(A)$, где $\omega_a(b,c)=\omega(a,b,c)$.

Если А – линейное пространство конечной размерности, то устанавливается изоморфизм между $M_n(A)$ и группой по сложению всех $(n+1)$-мерных матриц. При таком изоморфизме операция ω, действующая на базисе по правилу $\omega(e_{i_1},...,e_{i_n})=\sum_{k=1}^{n}a_{i_1...i_nk}e_k$, соответствует матрице, состоящей из m^{n+1} структурных констант, (m здесь обозначает размерность пространства) [3]. Отметим, что полное описание строения группы $\mathrm{Mult}(A)$ для произвольной абелевой группы A представляет открытую проблему. Группа $M_n(A)$ в свою очередь изоморфна группе гомоморфизмов из A в группу умножений, строение которой до конца неизвестно. Поэтому можно ставить задачу исследования $M_n(A)$ лишь для отдельных классов абелевых групп A. Например, последовательность групп $M_n(A)$ устроена наиболее просто, если группа есть аддитивная группа E-кольца:

Лемма. Если A – аддитивная группа E-кольца, то $M_n(A) \cong A \quad \forall n \in N$.

Напомним, что E-кольцом называется такое кольцо R, для которого выполнено условие $R \cong E(R^+)$, что влечёт $R^+ \cong E(R^+)^+$. Если A есть аддитивная группа E-кольца, то $A \cong R^+$ и, следовательно $A \cong E(A)^+$, то есть группа A изоморфна аддитивной группе своего кольца эндоморфизмов. Тогда

$$\mathrm{Mult}\,A \cong \mathrm{Hom}(A, E(A)) \cong \mathrm{Hom}(A, A) = E(A)^+ \cong A .$$

Соответственно, $M_3(A) \cong \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Mult}(A)) \cong \mathrm{Hom}(A, A) \cong A$. ■

Возникает естественный вопрос об изучении взаимосвязей бинарных и n-арных операций. Несомненно, некоторые из тернарных и n-арных операций можно построить как композиции бинарных, однако возможно, что это лишь незначительная часть всех n-арных операций на группе. Введём следующее определение.

Определение. Композицию двух бинарных операций $\varphi, \psi \in Mult(A)$ будем называть левым бинарным разложением тернарной операции $\omega(x, y, z)$, если $\omega(x, y, z) = \psi(\varphi(x, y), z) \ \ \forall x, y, z \in A$. Правое бинарное разложение определим аналогично $\psi(x, \varphi(y, z))$. Возможна ситуация, при которой $\varphi = \psi$, то есть разложение имеет вид: $\varphi(\varphi(x, y), z)$. Заметим, что даже в этом случае тернарные операции $\varphi(\varphi(x, y), z)$ и $\varphi(x, \varphi(y, z))$ могут быть различны, если умножение $\varphi \in Mult(A)$ неассоциативно. Так, например, две тернарные операции, вводимые как композиции векторного произведения $[[a, b], c]$ и $[a, [b, c]]$, в общем случае не совпадают.

Аналогично определим понятие бинарного разложения для n-арных операций с помощью равенств: $\omega(x_1, ..., x_n) = \varphi_{n-1}(\varphi_{n-2}(...\varphi_2(\varphi_1(x_1, x_2), x_3)...), x_n)$ (левое бинарное разложение) и $\omega(x_1, ..., x_n) = \varphi_{n-1}(x_1, \varphi_{n-2}(x_2, ...\varphi_2(x_{n-2}, \varphi_1(x_{n-1}, x_n))...))$ (правое бинарное разложение). В частности, при $n = 4$ имеем $\varphi_3(\varphi_2(\varphi_1(x_1, x_2), x_3), x_4)$ и $\varphi_3(x_1, \varphi_2(x_2, \varphi_1(x_3, x_n)))$. Заметим, что тернарные операции могут обладать только двумя типами бинарных разложений – левое и правое, тогда как для n-арных существуют и смешанные варианты, например $\varphi_3(x_1, \varphi_2(\varphi_1(x_2, x_3), x_4))$. Очевидно, что если n-арная операция коммутативна, то левое и правое бинарные разложения можно не различать.

Существуют известные примеры n-арных операций, определяемые для любого n, являющиеся бинарно-разложимыми. Например, операция вычисления наибольшего общего делителя системы из n чисел –коммутативная n-арная операция, при любом n она является бинарно-разложимой, так,

НОД(НОД(a,b),c) = НОД(a,b,c).

Для существования бинарного разложения тернарной операции в R^2, действие которой на базисных элементах описывается с помощью равенств

$$\omega(e_p, e_q, e_r) = \sum_{s=1}^{n} \gamma_{pqrs} \ , \ \ p, q, r = 1, ..., n ,$$

необходимо и достаточно выполнение n^4 соотношений для $2n^3$ неизвестных:

$$\sum_{t=1}^{n} \alpha_{pqt}\beta_{trs} = \gamma_{pqrs}, \quad \text{где } p,q,r,s = 1...n .$$

Примером такой операции может служить тернарное умножение, заданное по закону:

$$\omega(e_1,e_1,e_1) = e_1,\ \omega(e_1,e_1,e_2) = \omega(e_1,e_2,e_1) = \omega(e_2,e_1,e_1) = e_2,$$
$$\omega(e_2,e_2,e_1) = \omega(e_1,e_2,e_2) = \omega(e_2,e_1,e_2) = -e_1,\ \omega(e_2,e_2,e_2) = -e_2 .$$

Это умножение представляется как композиция последовательных бинарных умножений по закону

$$\omega(e_1,e_1) = e_1,\ \omega(e_1,e_2) = \omega(e_2,e_1) = e_2,\ \omega(e_2,e_2) = -e_1 .$$

Напомним принцип построения векторного произведения в многомерном пространстве, размерность которого отлична от 3. Пусть в пространстве размерности $n+1$ задана линейно независимая упорядоченная система из n векторов. Векторным произведением этой упорядоченной системы назовём вектор, ортогональный всем векторам системы, равный по модулю декартовой мере n-мерного параллелепипеда, порождаемого n векторами и направленный таким образом, что определитель матрицы $n+1$ порядка, составленный из координат векторов системы и данного вектора, положителен. Обозначение переносится из обычной векторной алгебры: $b = [a_1,...,a_n]$. Результат такой операции n-арного умножения ортогонален гиперпространству размерности n, содержащему n векторов, над которыми осуществляется операция (данная операция может также называться векторным гипер-произведением или полипроизведением).

Так, для тернарного умножения в R^4 обозначим базисные элементы i,j,k,l (по аналогии с мнимыми единицыми системы кватернионов). Ненулевые умножения соответствуют только тем тройкам, где все элементы попарно-различны, и задаются таким образом:

$$\omega(i,j,k) = \omega(j,k,i) = \omega(k,i,j) = l,\ \omega(j,i,k) = \omega(i,k,j) = \omega(k,j,i) = -l,$$
$$\omega(k,j,l) = \omega(l,k,j) = \omega(j,l,k) = i,\ \omega(j,k,l) = \omega(k,l,j) = \omega(l,j,k) = -i,$$
$$\omega(k,l,i) = \omega(l,i,k) = \omega(i,k,l) = j,\ \omega(l,k,i) = \omega(i,l,k) = \omega(k,i,l) = -j,$$
$$\omega(i,l,j) = \omega(l,j,i) = \omega(j,i,l) = k,\ \omega(l,i,j) = \omega(i,j,l) = \omega(j,l,i) = -k.$$

Здесь 24 из $4^3 = 64$ элементов отличны от 0, остальные соответствуют наборам элементов, содержащим хотя бы пару совпадающих и соответственно равны 0. Таблица умножения элементов состоит из 4^3 элементов и является трёхмерной, ниже представлены её двумерные сечения:

(i)	i	j	k	l
i	0	0	0	0
j	0	0	l	k
k	0	$-l$	0	j
l	0	$-k$	$-j$	0

(j)	i	j	k	l
i	0	0	$-l$	$-k$
j	0	0	0	0
k	l	0	0	i
l	k	0	$-i$	0

(k)	i	j	k	l
i	0	l	0	$-j$
j	$-l$	0	0	$-i$
k	0	0	0	0
l	j	i	0	0

(l)	i	j	k	l
i	0	k	j	0
j	$-k$	0	i	0
k	$-j$	$-i$	0	0
l	0	0	0	0

В общем случае все ненулевые структурные константы для данной n-арной операции задаются формулой: $a_{i_1...i_n i_{n+1}} = (-1)^{i_{n+1}}(-1)^s$, где s – количество инверсий в перестановке $(i_1,...,i_n)$.

Для n-арного векторного полипроизведения, как и для обычного бинарного произведения, результат действия операции можно задать с помощью определителя, например для тернарной операции он будет выглядеть следующим образом:

$$\omega(x,y,z)=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ i & j & k & l \end{vmatrix}$$

Заметим, что в такой записи строка из базисных элементов последняя, а не первая. Для обычного бинарного векторного произведения разница не была существенной, так как определитель с первой строкой $(i\,j\,k)$ может быть получен из определителя с последней строкой $(i\,j\,k)$ с помощью двух перестановок строк и соответственно его знак не изменится.

Перейдём к изучению внутренних свойств операции векторного полипроизведения, в частности, взаимосвязи с бинарными алгебраическими операциями.

Теорема. Операция n-арного векторного произведения не обладает бинарным разложением.

Доказательство. Рассмотрим сначала тернарное произведение, $n=3$. Допустим, что существует левое бинарное разложение вида $\omega(x,y,z)=\psi(\varphi(x,y),z)$, где $\omega(x,y,z)$ – операция векторного произведения. Прежде всего, покажем, что если элементы x, y линейно-независимы, то они не могут быть делителями нуля относительно бинарной операции φ. Предполагая обратное, получили бы $\omega(x,y,z)=\psi(\varphi(x,y),z)=\psi(0,z)=0\ \forall z$, в то время как для любой некомпланарной тройки векторов результат операции отличен от нуля.

Для любых $x,z\in A$: $\omega(x,x,z)=\psi(\varphi(x,x),z)=0$, откуда $\varphi(x,x)=0$ и, следовательно, операция φ является антикоммутативной.

Умножение на элемент x можно рассматривать как эндоморфизм пространства. Так как $\varphi_x(x)=0$, следовательно, ядром этого эндоморфизма является одномерное подпространство, порождённое элементом x. Возьмём $z\in \operatorname{Im}\varphi_x$ (при этом $z\perp x$). Тогда существует элемент y, такой, что $\varphi_x(y)=z$, то есть $\varphi(x,y)=z$. Следовательно, для любых двух взаимно ортогональных элементов z и x выполняется $\psi(z,x)=\psi(\varphi(x,y),x)=\omega(x,y,x)=0$. Таким образом, если рассматривать действие бинарной операции ψ на различных парах базисных элементов, то результат умножения отличен от нуля только при совпадении этих двух аргументов, то есть $\psi(i,i),\psi(j,j),\psi(k,k),\psi(l,l)\neq 0$, соответственно таблица умножения мнимых элементов диагональная.

Рассмотрим следующие тернарные умножения, где элемент i расположен на третьем месте:

$$\omega(j,k,i)=\psi(\varphi(j,k),i)=l\,,\quad \omega(k,l,i)=\psi(\varphi(k,l),i)=j\,,\quad \omega(l,j,i)=\psi(\varphi(l,j),i)=k\,.$$

Результат умножения каждого из элементов $\varphi(j,k)$, $\varphi(k,l)$, $\varphi(l,j)$ на i отличен от 0. Пусть элемент $\varphi(j,k)$ имеет следующее разложение по базису: $a_1i+a_2j+a_3k+a_4l$ $(a_i\in R)$. Тогда

$$\omega(j,k,i)=\ a_1\psi(i,i)+a_2\psi(j,i)+a_3\psi(k,i)+a_4\psi(l,i)\ =\ a_1\psi(i,i)=l\,.$$

Аналогично $\varphi(k,l) = b_1 i + b_2 j + b_3 k + b_4 l$, откуда следует $\omega(k,l,i) = b_1\psi(i,i) = j$. Соответственно для $\varphi(l,j) = c_1 i + c_2 j + c_3 k + c_4 l$ получаем $\omega(l,j,i) = c_1\psi(i,i) = k$. Таким образом, элементы $a_1\psi(i,i), b_1\psi(i,i), c_1\psi(i,i)$, образующие линейно-зависимую систему, равны соответственно l, j, k, которые образуют линейно-независимую систему. Получили противоречие.

Аналогично доказывается, что операция тернарного векторного произведения не обладает правым бинарным разложением.

Перейдём к рассмотрению n-арного умножения, бинарную неразложимость которого докажем по индукции (база индукции $n = 3$). Всякое n-арное полипроизведение взаимосвязано с $(n-1)$-арным, а именно, порождает аналогичную $(n-1)$-арную операцию при фиксировании некоторого базисного элемента на одном из мест. Например, рассматривая все тернарные умножения вида $\omega(*,l,*)$, где элемент l расположен на втором месте, нетрудно заметить, что индуцированная бинарная операция над оставшимися элементами i, j, k действует в точности так же, как умножение мнимых частей в системе кватернионов, то есть является бинарным векторным умножением. Если же зафиксировать первый элемент базиса на первом месте для n-арного умножения, получим $(n-1)$-арное умножение относительно остальных элементов, которое соответствует минору, содержащему все строки и столбцы кроме первых:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & * & \ddots & * \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Если существует бинарное разложение n-арной операции, то получаем также бинарную разложимость порождённой $(n-1)$-арной операции, что невозможно в силу предположения индукции. ■

Известно, что бинарное векторное умножение действует по тому же закону, что и умножение мнимых единиц в системе кватернионов. В связи с этим логично поставить вопрос о построении системы с n-арной операцией, содержащей действительную единицу, причём так, чтобы операция над «мнимыми» элементами совпадала с умножением, рассмотренным выше. Элементы такой системы можно описать следующим образом:

$$K_n = \{a = a_0 + \sum_{m=1}^{n-1} a_m i_m\}.$$

Данные системы строятся по принципу, отличному от классического метода удвоения размерности пространства при построении гиперкомплексных систем [5], и существуют в пространстве размерности n+2 при n-арной операции. Рассмотрим подробнее тернарную операцию. Множество элементов задаётся в виде

$$K_5 = \{a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k + a_4 l\},$$

где a_0 – действительная часть, $a_1 i + a_2 j + a_3 k + a_4 l$ – мнимая. Если действительная единица является нейтральным элементом относительно операции, то $\omega(1,1,i) = \omega(1,i,1) = \omega(i,1,1) = i$, аналогичное верно также для элементов j,k,l. Умножения для наборов элементов, не содержащих ни одну пару совпадающих, заданы ранее, остаётся определить умножения для наборов, содержащих одинаковые «мнимые» элементы (в случае бинарной операции это были умножения вида $i^2 = -1,\ j^2 = -1,\ k^2 = -1$). Заметим, что такая система обязательно содержит делители нуля, то есть упорядоченные наборы элементов, результат операции над которыми равен 0. Например, если по аналогии с обычной системой кватернионов положим $\omega(i,i,j) = -1, \omega(i,j,j) = -1$, то из дистрибутивности операции относительно сложения сразу выводится $\omega(i,i-j,j) = 0$, то есть $\{i,i-j,j\}$ – делители нуля.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1977. Т.2.
2. *Крылов П.А.*, *Приходовский М.А.* Обобщённые *T*-модули и *E*-модули // Универсальная алгебра и её приложения: Тр. участ. Междунар. семинара, посвящ. памяти Л.А. Скорнякова (Волгоград, 6 – 11 сент. 1999.). Волгоград, 2000. С. 153 – 169.
3. *Приходовский М.А.* Применение многомерных матриц для исследования гиперкомплексных чисел и конечномерных алгебр // Вестник ТГУ. 2004. № 284. С. 27 – 30.
4. *Гальмак А.М.* *N*-арные группы // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2007. № 2(8). Т. 4. С. 76 – 95.
5. *Кантор И.Л.*, *Солодовников А.С.* Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

ПРИХОДОВСКИЙ Михаил Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. E-mail: prihod1@yandex.ru

Статья принята в печать 18.04.2009 г.