Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Томский государственный университет

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ И АЛГЕБРЕ

Издательство Томского университета
Томск-1998

Исследования по математическому анализу и алгебре / Под редакцией И.А. Александрова, А. М. Бубенчикова, С. П. Гулько, П.А. Крылова, М.Р. Куваева – Томск: Изд- во Том. ун-та, 1998. –278с. 200экз. 1602070000.

Издание подготовлено к 50- летнему юбилею механико- математического факультета Томского госуниверситета. В сборник включены работы по комплексному анализу, геометрии и топологии, алгебре, истории и методике преподавания математики.

Для научных сотрудников, а также студентов старших курсов соответствующих специальностей.

Издание осуществлено при финансовой поддержке РФФИ, выполняемой по программе "Ведущие научные школы России", грант №96-05-0097 "Исследования по комплексному анализу и алгебре"

ISBN 5-7511-1009-9

И $\frac{1602070000}{177(012)-98}$

УДК 512.55+512.541

T-модули и их кольца эндоморфизмов *

М.А.Приходовский

Томский государственный университет

634050,Томск,проспект Ленина,36

Пусть R - коммутативное кольцо с единицей. Рассматриваются классы модулей над R, на которых функтор тензорного умножения на R действует как тождественный. Исследуются свойства замкнутости таких классов; взаимосвязь между условием $A \otimes_Z R = A \otimes_R R$ и некоторыми свойствами кольца R, в частности, в случае $R = E(A)$.

В 1970-х годах рядом авторов были введены понятия Е-кольца и Е-модуля, исследованы свойства этих объектов ([3],[4],[5]). Е-модули определяются условием $Hom_Z(R, A) = Hom_R(R, A)$,а Е-кольца условием $E(R^+) = R$.Аналогично можно обобщить понятие Т-кольца, введенное в [4].

Определение 1 Модуль A_R над коммутативным кольцом R с единицей называется $T(R)$-модулем, или тензорно-представимым над R ,если существует естественный изоморфизм $A \otimes_Z R \cong A$ (или, что то же самое,$A \otimes_Z R = A \otimes_R R$). Если R_R является $T(R)$-модулем, то кольцо R называется T-кольцом [(4)].

Определение 2 Пусть A_R , $_RC$ - модули над R, P - некоторая абелева группа. Билинейное отображение $f : A \otimes C \mapsto P$ называется сбалансированным над R, если $f(ar, c) = f(a, rc)$ $\forall r \in R, a \in A, c \in C$.

§1. Свойства замкнутости класса $T(R)$-модулей.

Рассмотрим некоторые алгебраические конструкции, которые сохраняют свойство $A \otimes_Z R \cong A$.

Предложение 1.1 Прямая сумма $T(R)$-модулей является $T(R)$-модулем.

Доказательство. Пусть $A = \oplus_{i \in I} A_i$, где каждый модуль A_i является $T(R)$-модулем, то есть $A_i \otimes_Z R = A_i \otimes_R R$ $\forall i \in I$.

Верна следующая последовательность естественных изоморфизмов:

$$A \otimes_Z R = (\oplus_{i \in I} A_i) \otimes_Z R \cong \oplus_{i \in I}(A_i \otimes_Z R) \cong$$
$$\cong \oplus_{i \in I}(A_i \otimes_R R) \cong (\oplus_{i \in I} A_i) \otimes_R R = A \otimes_R R. \square$$

*Работа поддержана РФФИ, грант 97-01-00795

Предложение 1.2 Пусть A - $T(R)$-модуль и $B \subseteq A$. Тогда фактор-модуль A/B является $T(R)$-модулем.

Доказательство. Точная последовательность

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow A/B \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

индуцирует точные последовательности:

$$0 \longrightarrow B \otimes_R R \longrightarrow A \otimes_R R \longrightarrow A/B \otimes_R R \longrightarrow 0$$

и $$B \otimes R \longrightarrow A \otimes R \longrightarrow A/B \otimes R \longrightarrow 0.$$

По определению тензорных произведений $\otimes_Z$ и $\otimes_R$ существуют канонические эпиморфизмы

$B \otimes R \to B \otimes_R R$ и $A/B \otimes R \to A/B \otimes_R R$. Согласно условию предложения, $A \otimes_Z R = A \otimes_R R$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} B \otimes R & \underbrace{\longrightarrow}_{\alpha_1} & A \otimes R & \underbrace{\longrightarrow}_{\alpha_2} & A/B \otimes R & \longrightarrow 0 \\ \downarrow \gamma_1 & & \downarrow \gamma_2 & & \downarrow \gamma_3 & \\ 0 \longrightarrow B \otimes_R R & \underbrace{\longrightarrow}_{\beta_1} & A \otimes_R R & \underbrace{\longrightarrow}_{\beta_2} & A/B \otimes_R R & \longrightarrow 0. \end{array}$$

Докажем, что γ_3 - мономорфизм, и, следовательно — изоморфизм. Пусть $a_3 \in Ker\gamma_3$. α_2 - эпиморфизм $\Rightarrow \exists a_2 : a_3 = \alpha_2 a_2$.Второй квадрат коммутативен, поэтому $\beta_2\gamma_2 a_2 = \gamma_3\alpha_2 a_2 = \gamma_3 a_3 = 0$. Нижняя строка точна, следовательно, $\beta_1 b_1 = \gamma_2 a_2$ для некоторого $b_1 \in B \otimes_R R$. γ_1 - эпиморфизм $\Rightarrow \gamma_1 a_1 = b_1$ для некоторого $a_1 \in B \otimes R$. $\gamma_2\alpha_1 a_1 = \beta_1\gamma_1 a_1 = \beta_1 b_1 = \gamma_2 a_2 \Rightarrow \alpha_1 a_1 = a_2$ (так как γ_2 - мономорфизм),откуда $\Rightarrow a_3 = \alpha_2 a_2 = \alpha_2\alpha_1 a_1 = 0$. Следовательно,$\gamma_3$ - мономорфизм. □

Предложение 1.3 Пусть A_R и ${}_RC$ - модули над R . Если хотя бы один из них является $T(R)$-модулем, то $A \otimes_Z C \cong A \otimes_R C$ канонически, то есть отображение $a \otimes_Z c \longrightarrow a \otimes_R c$ - изоморфизм.

Доказательство. Пусть A есть $T(R)$-модуль, $A \otimes_Z R \cong A \otimes_R R$. Справедлива такая последовательность естественных изоморфизмов:

$A \otimes_R C \cong (A \otimes_Z R) \otimes_R C \cong A \otimes_Z (R \otimes_R C) \cong A \otimes_Z C$

. Аналогично, если C есть $T(R)$-модуль,то:

$A \otimes_Z C \cong (A \otimes_R R) \otimes_Z C \cong A \otimes_R (R \otimes_Z C) \cong A \otimes_R C$. □

Следствие 1.4 Если один из модулей A или C есть $T(R)$-модуль, то каждая билинейная функция $f : A \times C \to P$,где P- абелева группа, является сбалансированным над R отображением.

Пусть A - абелева группа. Тогда $E(A)$ обозначает кольцо эндоморфизмов группы A, а $Mult(A)$ - группу кольцевых умножений на A.

Следствие 1.5 Если группа A является T-модулем над $E(A)$,то $\forall\varphi \in E(A), \forall\mu \in Mult(A) : \mu(\varphi(a), b) = \mu(a, \varphi(b))$.

Пусть R – коммутативное кольцо с единицей. Каждый модуль A_R можно считать $R-R$-бимодулем. Тогда на $A\otimes_z C$ и $A\otimes_R C$ существует модульная структура над R. Например, на $A \otimes_z C$ она задается таким образом: $(a \otimes_z c)r = a \otimes_z rc$.

Предложение 1.6 Если хотя бы один из модулей A и C есть $T(R)$-модуль, то на $A \otimes_z C(= A \otimes_R C)$ существует структура $T(R)$-модуля над R.

Доказательство. Заметим, что по предложению 1.3 $A\otimes_z C = A\otimes_R C$. Пусть A - $T(R)$-модуль. Тогда

$R \otimes_z (A \otimes_z C) \cong (R \otimes_z A) \otimes_z C \cong (R \otimes_R A) \otimes_z C \cong R \otimes_R (A \otimes_z C)$

Другие случаи доказываются аналогично.

§ 2.Некоторые свойства $T(R)$-модулей

Теорема 2.1 Каждый модуль над T-кольцом является одновременно $T(R)$-модулем и $E(R)$-модулем.

Доказательство. Пусть R - T-кольцо, то есть $R \otimes_z R = R \otimes_R R$. Возьмем правый унитарный модуль A_R. Заметим, что кольцо R коммутативно, так как оно является E-кольцом([3],[4]).

1. Докажем, что A_R есть $T(R)$-модуль.

Справедлива последовательность естественных изоморфизмов:

$A \otimes_z R \cong (A \otimes_R R) \otimes_z R \cong A \otimes_R (R \otimes_z R) \cong A \otimes_R (R \otimes_R R) \cong A \otimes_R R$

Следовательно, A_R является $T(R)$-модулем.

2. Покажем, что $Hom_z(R, A) = Hom_R(R, A)$. Воспользуемся сопряженностью функторов Hom и $\otimes$

$Hom_S(A \otimes_R B, C) = Hom_R(A, Hom_S(B, C))$.

Имеем последовательность естественных изоморфизмов

$Hom_z(R, A) \cong Hom_z(R, Hom_R(R, A)) \cong Hom_R(R \otimes_z R, A) \cong$
$Hom_R(R \otimes_R R, A) \cong Hom_R(R, A)$. □

Предложение 2.2 Пусть A_R и ${}_RB_R$- модули, и A_R является $T(R)$-модулем. Тогда $Hom_z(A, B) = Hom_R(A, B)$.

Доказательство. Справедлива цепочка естественных изоморфизмов

$Hom_z(A, B) \cong Hom_z(A, Hom_R(R, B)) \cong Hom_R(A \otimes_z R, B) \cong$
$Hom_R(A \otimes_R R, B) \cong Hom_R(A, B)$. □

Замечание. В [5] доказано, что для выполнения равенства $Hom_z(A, B) = Hom_R(A, B)$ достаточно существования E-модульной структуры на B. Связь между этим фактом и предложением 2.2 является еще одним наглядным проявлением сопряженности Hom и $\otimes$.

Следствие 2.3 Пусть A_R – модуль над R и выполнено одно из двух условий:

1) A_R есть $T(R)$-модуль;

2) R – E-кольцо.

Тогда $Hom_z(A, R) = A^*$, где $A^* = Hom_R(A, R)$ - дуальный модуль.

Предложение 2.4 Пусть R – коммутативное кольцо с епиницей, A_R – $T(R)$-модуль, B – абелева группа. Тогда на группе $Hom_z(A, B)$ можно задать структуру $E(R)$-модуля. Если B – левый R-модуль, то на $Hom_R(A, B)$ также существует структура E-модуля.

Доказательство. Модульная структура на $Hom_z(A, B)$ определяется следующим образом: $\forall \varphi \in Hom(A, B) : (\varphi r)(a) := \varphi(ar)$. Известно также, что $A \otimes R = R \otimes A$. Отсюда следует цепочка изоморфизмов:

$Hom_z(R, Hom_z(A, B)) \cong Hom_z(R \otimes_z A, B) \cong Hom_z(R \otimes_R A, B) \cong Hom_R(R, Hom_z(A, B))$.

$Hom_R(A,B)$ — $E(R)$-модули

Если B – R-модуль, то согласно предложению 2.2

$Hom_z(A, B) = Hom_R(A, B)$.□

Следствие 2.5 Пусть A_R – $T(R)$-модуль. Тогда $E(A) = End_R A$ и аддитивная группа $E(A)^+$ допускает структуру $E(R)$-модуля.

Для доказательства достаточно положить $A = B$ в предложениях 2.2 и 2.4.

Таким образом, исследуемый класс T-модулей является еще одним классом (кроме класса E-модулей), для которого групповые эндоморфизмы являются модульными.

Предложение 2.6 Пусть группа A является T-модулем над кольцом $E(A)$, то есть $E(A) \otimes A \cong A$. Тогда $E(A)$ есть E-кольцо.

Доказательство можно вывести из предложения 2.4, положив $A = B$ и $R = E(A)$:

$Hom_z(E(A), E(A)) \cong Hom_z(E(A), Hom_z(A, A)) \cong Hom_z(E(A) \otimes_z A, A)$
$\cong Hom_z(E(A) \otimes_{E(A)} A, A) \cong Hom_{E(A)}(E(A), E(A)) \cong E(A)$

. Таким образом, $E(E(A)^+) \cong E(A)$. □

Предложение 2.6 дает необходимое условие для того, чтобы группа A являлась T-модулем над кольцом эндоморфизмов $E(A)$. Очевидно, что группа с некоммутативным кольцом эндоморфизмов не может быть T-модулем над этим кольцом. И вообще, если $E(A)$ – не E-кольцо, то ${}_{E(A)}A$ не является T-модулем над $E(A)$. Однако оно может быть T-модулем над некоторым более узким кольцом. Например, пространство Q^n есть T-модуль над Q, но не является T-модулем над кольцом $E(Q^n)$, так как это – некоммутативное кольцо матриц порядка n над Q.

Прямая сумма T-модулей над R может не быть T-модулем над $E(A)$, так как кольцо $E(\oplus_{i\in I}A_i)$ изоморфно кольцу матриц с элементами $Hom(A_j, A_i)$ и некоммутативно.

К T-модулям над кольцами эндоморфизмов применима теория групп с E-кольцами эндоморфизмов. Так, например, если A – периодический модуль над $E(A)$, то A – периодическая группа с коммутативным кольцом эндоморфизмов, и она имеет вид $A = \oplus_p C_p$, где p – простые числа, C_p – коциклические группы.

Литература

1. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.,"Мир",1971.том 1.
2. Каш Ф. Модули и кольца. М.,"Мир",1981.
3. Schultz P. The endomorphism ring of the additive group of a ring// J.Austral.Math.Soc.1973.V.15.P.60-69.
4. Bowshell R.A.,Schultz P. Unital rings whose additive endomorphism commute// Math.Ann.1977.V.228.P.197-214.
5. Pierce R.S. E-modules// Contemporary Math.1989.V.89.P.221-240.