Министерство образования Российской Федерации
Томский государственный университет

На правах рукописи

ПРИХОДОВСКИЙ Михаил Анатольевич

ИЗОМОРФИЗМЫ ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ МОДУЛЕЙ И T-МОДУЛИ

01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н, профессор
Крылов Петр Андреевич

Томск - 2002

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В разное время интерес многих алгебраистов привлекал вопрос об изучении взаимосвязей между свойствами абелевых групп и модулей. В этом направлении имеется большое количество работ. В рамках этой проблематики находится изучение E-колец и E-модулей. Первые публикации о E-кольцах и E-модулях относятся к 1970-м годам. E-модуль A над кольцом R определяется равенством групп гомоморфизмов $Hom_Z(R, A) = Hom_R(R, A)$. В частности, если рассматривать кольцо R как правый регулярный модуль, приходим к изоморфизму $R \cong E(R^+)$, который задает класс E-колец. Впервые понятие E-кольца появилось в 1973 г. в работе [Sc1]. Затем оно было перенесено на класс модулей; такие модули назывались в [Bow1] R-группами. E-модулям посвящены работы [Ma1], [Pie1] и другие.

В настоящее время E-модули и E-кольца находят широкое применение в теории абелевых групп. Например, в [Go1] изучаются саморефлексивные группы G, которые определяются условием $G \cong Hom(Hom(G, G), G)$. Группа является саморефлексивной тогда и только тогда, когда она является E-модулем над своим кольцом эндоморфизмов. E-модули существенно используются при изучении абелевых групп как модулей над своими кольцами эндоморфизмов. Так, для абелевой группы G без кручения конечного ранга верно, что G – циклический проективный модуль над своим кольцом эндоморфизмов $E(G)$ тогда и только тогда, когда $G = R \oplus A$, где R есть E-кольцо и A – E-модуль над R [Ne1],[Ar1]. В [K4] дан обзор результатов об абелевых группах как модулях над своими кольцами эндоморфизмов, показывающий пользу E-модулей и E-колец в этих вопросах.

С другой стороны, активно изучаются тензорные произведения абелевых групп и модулей. Тензорное произведение является второй (после группы гомоморфизмов) важнейшей конструкцией. Описание строения тензорных произведений абелевых групп и модулей является актуальной проблемой. Представляет интерес изучение взаимосвязей между тензорными произведениями модулей над разными кольцами. В общем случае для модулей A_R и ${}_RC$ тензорные произведения $A \otimes_Z C$ и $A \otimes_R C$ – различные объекты. Однако при некоторых условиях между ними может существовать канонический изоморфизм.

В диссертации вводится новое понятие – T-модуль, или $T(e)$-модуль, который определяется условием $A \otimes_S R \cong A \otimes_R R$ в предположении, что задан гомоморфизм колец $e : S \to R$. В частности, рассматривается условие $A \otimes_Z R \cong A \otimes_R R$. Заметим, что для каждого кольца R есть единственный кольцевой гомоморфизм $Z \to R$.

Рассматривается следующая задача: получить описание классов модулей, для которых существует канонический изоморфизм $A \otimes_S R \cong A \otimes_R R$. В некотором смысле это направление можно считать двойственным к изучению E-модулей. Здесь вместо функтора Hom рассматривается функтор тензорного умножения. Оказывается, что естественно, классы E- и T-модулей тесно взаимосвязаны.

Для колец изоморфизмы $R \otimes_Z R \cong R$ или $R \otimes_S R \cong R$ изучались в работах [Bow1], [Si1] и других. Кольцо R со свойством $R \otimes_Z R \cong R$ называется T-кольцом [Bow1]. Вопрос о взаимосвязи между модулем A_R и тензорным произведением $A \otimes_S R$ исследовал Сильвер [Si1] в предположении, что $e : S \to R$ – эпиморфизм в категории колец. В диссертации исследуются соответствующие конструкции без этого ограничения. В [Si1] доказано, что существование канонического изоморфизма $R \otimes_S R \cong R$ эквивалентно тому, что $e : S \to R$ – эпиморфизм в категории колец. (При $S = Z$ это в точности класс T-колец в смысле [Bow1].)

Настоящая работа посвящена изучению T-модулей. В отличие от подхода в [Pie1], где фиксируется кольцо R и рассматриваются классы абелевых групп, являющихся $E(R)$-модулями, здесь удобно применять также и другой метод исследования. Он состоит в том, что фиксированная абелева группа A рассматривается как модуль над различными кольцами, например, над Z, R, над кольцом $E(A)$ всех эндоморфизмов группы A и его центром $Z(E(A))$. Известно, что каждая абелева группа A естественным образом является модулем над кольцом $E(A)$. Все модульные структуры на группе A над кольцом R могут быть ассоциированы с гомоморфизмами колец $\rho : R \to E(A)$. При этом группа A может быть превращена в притягивающий R-модуль [Ф1].

Исследование развивается по двум направлениям.

1. Изучение общих свойств T-модулей, нахождение связей этих объектов с группами гомоморфизмов, кольцами эндоморфизмов и другими конструкциями.

2. Описание классов абелевых групп, на которых есть структура T-модуля над каким-либо кольцом и описание колец, над которыми существуют T-модули.

Цель работы : исследовать условия существования канонического изоморфизма $A \otimes_S R \cong A \otimes_R R$; получить характеризации модулей, для которых справедлив данный изоморфизм; описать различные классы таких модулей.

Научная новизна и практическая ценность. Основные полученные результаты являются новыми. К основным результатам работы можно отнести следующие.

1. Получен критерий, характеризующий T-модули с помощью групп аддитивных и модульных гомоморфизмов (теорема 4.6) и некоторые его следствия, обобщающие ряд фактов из [Bow1],[Pie1] о E- и T-свойствах модулей над T-кольцами.

2. Исследована взаимосвязь между условием T-модульности $A \otimes_S R \cong A \otimes_R R$ и свойствами кольца R (теорема 6.1, следствие 6.2).

3. Получено полное описание колец, над которыми существуют T-модули относительно гомоморфизма $e : Z \to R$ (теоремы 8.3 и 10.2).

4. Описаны абелевы группы, на которых может быть задана структура T-модуля над кольцами R, $E(A)$, $Z(E(A))$ в классах периодических групп (теорема 9.1, следствие 9.2), групп без кручения (теоремы 8.3, 10.3, 10.5, следствие 10.7), в частности, сепарабельных групп без кручения (следствие 10.7, теорема 10.9).

Работа имеет теоретическое значение. Проведенное исследование T-модулей вносит определенный вклад в нахождение взаимосвязей между аддитивными и модульными свойствами. Полученные результаты о T-модулях могут быть использованы при изучении E-модулей. Так, из результатов § 4 и § 7 видно, что можно изучать группы $Hom_Z(A, B)$ как E-модули над кольцом R или над $E(A)$. Результаты диссертации могут применяться при исследовании строения тензорных произведений абелевых групп.

Все встречающиеся в работе кольца - ассоциативные с единицей, модули - унитарные. Под словом "группа" понимается "абелева группа". Конец доказательства отмечается символом $\square$.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы и содержит 90 страниц.

Во введении рассматривается круг проблем, которые приводят к изучаемым в диссертации вопросам; актуальность данной темы.

Первый параграф имеет предварительный характер. Здесь приведены основные обозначения, определения, а также некоторые результаты, которые используются в дальнейшем, в том числе факты из теории E-модулей, содержащиеся в [Bow1],[Pie1],[Sc1].

Во втором параграфе исследуется вопрос о зависимости условий $A \otimes_S R \cong A \otimes_R R$ и $Hom_S(R, A) = Hom_R(R, A)$ от выбора кольцевого гомоморфизма $e : S \to R$. Оказывается, что на e могут быть наложены некоторые условия, не ограничивающие общности дальнейших результатов.

Теорема 2.4. *Пусть R, S – кольца и существует кольцевой гомоморфизм $e : S \to R$. Модуль A_R является T-модулем (E-модулем) относительно e тогда и только тогда, когда он является T-модулем (E-модулем) относительно любого гомоморфизма колец $h : S \to R$, для которого $e(S) = h(S)$.*

Вторая глава посвящена исследованию общих свойств модулей, для которых справедлив канонический изоморфизм $A \otimes_S R \cong A \otimes_R R$ (в частности, $A \otimes_Z R \cong A \otimes_R R$).

В третьем параграфе получен критерий $T(e)$-модуля.

Теорема 3.1. *Пусть $e : S \to R$ – гомоморфизм колец. Модуль A_R является T-модулем тогда и только тогда, когда $A \otimes_S (R/e(S)) = 0$.*

Этот критерий существенно применяется в третьей главе, где он принимает вид $A \otimes R/ < 1 >= 0$.

Модули $A \otimes_S R$ и $Hom_S(R, A)$ разлагаются в прямые суммы, где одно слагаемое канонически изоморфно A, а другое – канонически изоморфно $A \otimes_S R_0$ (соответственно, $Hom_S(R_0, A)$):

Теорема 3.5. *Пусть $e : S \to R$ – гомоморфизм колец, A_R – модуль. Существует канонический изоморфизм правых S-модулей*

$$A \otimes_S R \cong (A \otimes_R R) \oplus (A \otimes_S (R/e(S))).$$

Предложение 3.7. *Пусть $e : S \to R$ – гомоморфизм колец, A_R – модуль. Существует канонический изоморфизм правых S-модулей*

$$Hom_S(R, A) \cong Hom_R(R, A) \oplus Hom_S(R/e(S), A).$$

Далее для ситуации $e : S \to R$ обобщаются некоторые свойства T-колец, E-колец и E-модулей из [Bow1],[Pie1],[Sc1], в частности, о взаимосвязи между T- и E-кольцами. Результаты этого параграфа носят предварительный характер для дальнейшего исследования, однако представляют и самостоятельный интерес.

В четвертом параграфе исследуются некоторые свойства T-модулей. Рассматриваются группы гомоморфизмов $Hom_Z(A, B)$ и $Hom_R(A, B)$, где A – T-модуль. Доказано, что если A – правый T-модуль над кольцом R, то $Hom_Z(A, B)$ – левый E-модуль.

Далее T-модули охарактеризованы с помощью групп гомоморфизмов.

Теорема 4.6. *Пусть R, S – кольца, $e : S \to R$ – гомоморфизм колец, A_R – модуль. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) A – $T(e)$-модуль;

2) для всякого R-модуля B верно равенство $Hom_S(A, B) = Hom_R(A, B)$.

Это свойство двойственно к свойству E-модуля A, для которого верно $Hom_S(B, A) = Hom_R(B, A)$ для любого R-модуля B.

Полученный критерий применяется к исследованию взаимосвязи между различными свойствами A_R как абелевой группы и как R-модуля.

В пятом параграфе рассматриваются свойства замкнутости классов T-модулей относительно различных алгебраических конструкций: прямых сумм модулей, прямых пределов, эпиморфных отображений.

В шестом параграфе исследуется фиксированная абелева группа как T-модуль над разными кольцами. Устанавливаются взаимосвязи между условием T-модульности и свойствами кольца R. Оказывается, что существование точного T-модуля над кольцом R накладывает сильное ограничение на R.

Теорема 6.1. *Пусть R – кольцо, A_R – точный модуль, являющийся T-модулем относительно гомоморфизма $e : S \to R$. Тогда R есть левое E-кольцо относительно e.*

Далее исследуется единственность модульной структуры T-модуля.

Следствие 6.3. *Пусть $e : S \to R$ – гомоморфизм колец, A – S-модуль. Пусть на A можно задать структуру R-модуля так, что он становится притягивающим S-модулем и T-модулем относительно гомоморфизма e. Тогда структура R-модуля, такая, что A – притягивающий S-модуль, единственна.*

В седьмом параграфе рассматриваются различные свойства модулей над кольцами R и S в случае, когда R_S является T-модулем.

Следствие 7.2. *Пусть R, S – кольца, $h : S \to R$ – гомоморфизм колец, R_S – T-модуль. Тогда*
1) каждый модуль A_R является абсолютным T-модулем тогда и только тогда, когда он является T-модулем относительно гомоморфизма $h : S \to R$;

2) каждый модуль A_R является абсолютным E-модулем тогда и только тогда, тогда он является E-модулем относительно гомоморфизма $h : S \to R$.

Из этого следуют как частные случаи (при $R = S$) некоторые известные свойства модулей над T-кольцами [Bow1],[Si1]. Так, кольцо R является T-кольцом тогда и только тогда, когда каждый модуль A_R является $T(R)$-модулем. Аналогично, кольцо R является T-кольцом тогда и только тогда, когда каждый модуль A_R является $E(R)$-модулем.

Рассматривается факторкольцо R/I как модуль над R. Доказано, что из того, что $(R/I)_R$ является $T(R)$-модулем, следует, что R/I является E-кольцом. Отсюда при $I = 0$ вытекает утверждение [Bow1] о том, что каждое T-кольцо является E-кольцом.

В третьей главе изучаются различные классы T-модулей. Описаны кольца, над которым есть T-модули. Существенное значение при этом имеют ранг без кручения и p-ранги аддитивной группы кольца.

Теорема 8.3. *$\mathcal{T}(R) = \mathcal{T}_t(R)$ тогда и только тогда, когда $r_0(R) \neq 1$.*

В § 9 исследуются периодические группы как T-модули.

Теорема 9.1. *Пусть R – кольцо. Тогда*

1) Класс $\mathcal{T}_p(R)$ непуст тогда и только тогда, когда $r_p(R) = 1$.

2) Если $B_p \cong Z$, то $\mathcal{T}_p(R)$ содержит все p-группы, а в случае, когда $B_p \cong Z(p^k)$, класс $\mathcal{T}_p(R)$ состоит из всех p-групп A с условием $p^k A = 0$.

Следствие 9.2. *Пусть $A = \oplus_{p \in P} A_p$ – периодическая группа. Тогда на группе A существует структура $T(R)$-модуля тогда и только тогда, когда*

1) $A_p = 0$ для всех таких простых чисел p, что $r_p(R) \neq 1$;

2) $p^k A_p = 0$ для всех p, для которых p-базисной подгруппой группы R^+ является $Z(p^k)$.

Установлена взаимосвязь с E-модулями.

Следствие 9.3. *Пусть A – периодическая группа. Тогда если $A \in \mathcal{E}(R)$, то $A \in \mathcal{T}(R)$.*

Рассматриваются периодические группы как T-модули над своими кольцами эндоморфизмов и центрами колец эндоморфизмов.

Предложение 9.7. *Всякая периодическая группа является T-модулем над центром своего кольца эндоморфизмов.*

Предложение 9.8. *1) p-группа A является T-модулем над $E(A)$ тогда и только тогда, когда $A \cong Z(p^\infty)$ или $A \cong Z(p^k)$ для некоторого натурального числа k.*
2) периодическая группа A является T-модулем над $E(A)$ тогда и только тогда, когда A – подгруппа в Q/Z.

В десятом параграфе исследуются группы без кручения, являющиеся T-модулями над R, $E(A)$ или $Z(E(A))$.

Здесь полностью решается вопрос о кольцах, над которыми есть T-модули.

Теорема 10.2. *Над кольцом R существуют $T(R)$-модули тогда и только тогда, когда либо $r_0(R) = 1$, либо существует такое простое число p, что $r_p(R) = 1$.*

Теорема 10.3. *Пусть R – кольцо без кручения ранга 1, A – группа. Тогда A является $T(R)$-группой тогда и только тогда, когда $D(R) \subseteq D(A)$.*

Для групп без кручения получен критерий, описывающий, когда группа может быть превращена в T-модуль над кольцом R.

Теорема 10.5. *Пусть A – группа без кручения, R – кольцо ран-*

га без кручения 1. Группа A является $T(R)$-группой тогда и только тогда, когда $pA = A$ для всех p, для которых либо $R_p \neq 0$, либо $p \cdot R/T(R) = R/T(R)$.

Отсюда можно выяснить строение различных классов $T(R)$-групп:

Следствие 10.7. *Пусть R – кольцо ранга без кручения 1, A – группа без кручения. Тогда*

1) $A \in \mathcal{T}(R)$ тогда и только тогда, когда для любого элемента $a \in A$ выполнено условие $t(a) \geq t_0$;

2) если A – однородная группа типа t, то $A \in \mathcal{T}(R)$ тогда и только тогда, когда $t \geq t_0$;

3) если A – вполне разложимая или векторная группа, то $A \in \mathcal{T}(R)$ тогда и только тогда, когда для каждой компоненты A_i ранга 1 выполнено условие $t(A_i) \geq t_0$;

4) если A – сепарабельная группа, то $A \in \mathcal{T}(R)$ тогда и только тогда, когда для каждого ее прямого слагаемого C ранга 1 верно $t(C) \geq t_0$.

Далее рассматривается класс сепарабельных групп без кручения.

Теорема 10.9. *Пусть A – сепарабельная группа без кручения. Следующие условия эквивалентны:*

1) A является T-модулем над кольцом $Z(E(A))$;

2) A неразложима в прямую сумму ненулевых вполне характеристических подгрупп;

3) любые два типа $s, t \in \Omega(A)$ эквивалентны.

ГЛАВА 1

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФАКТЫ

R – произвольное кольцо, R^+ – его аддитивная группа

$Z(R)$ – центр кольца R

A_R – правый модуль A над кольцом R

p – некоторое простое число

Z_{p^k} – кольцо вычетов по модулю p^k

$Z(p^k)$ – циклическая группа порядка p^k

Q – поле или группа рациональных чисел

Z – кольцо или группа целых чисел

$A \otimes_R C$ – тензорное произведение модуля A_R на модуль ${}_RC$ над кольцом R

$Hom_R(A, B)$ – группа R-модульных гомоморфизмов из модуля A в модуль B

$Hom_Z(A, B)$ – группа аддитивных гомоморфизмов из модуля A в модуль B

$E(A)$ – кольцо эндоморфизмов абелевой группы A

$End_R A$ – кольцо R-модульных эндоморфизмов модуля A_R

$Z(E(A))$ $(= End_{E(A)} A)$ – центр кольца эндоморфизмов группы A

$Biend A_R$ $(= End_{End_R A} A)$ – кольцо биэндоморфизмов модуля A_R

$Ann_R A$ – аннулятор модуля A в кольце R

$Z(p^\infty)$ – квазициклическая группа

Q_p^* – кольцо целых p-адических чисел

J_p – аддитивная группа кольца целых p-адических чисел

$r_0(A)$ – ранг без кручения группы A

$r_p(A)$ – p-ранг группы A

$o(a)$ – порядок элемента a

$h_p(a)$ – p-высота элемента a

$\oplus$ – прямая сумма

Π – прямое произведение

mod-R – категория правых R-модулей

R-mod – категория левых R-модулей

$A \otimes_S R$ – ковариантное расширение модуля A_R

$Hom_S(R, A)$ – контравариантное расширение модуля A_R

$\mathcal{E}(R)$ – класс всех групп, на которых существует структура $E(R)$-модуля относительно гомоморфизма колец $e : Z \to R$

$\mathcal{T}(R)$ – класс всех групп, на которых существует структура $T(R)$-модуля относительно гомоморфизма колец $e : Z \to R$

Определение 1.1. *1. Пусть A, C и G – произвольные группы, $g : A \times C \to G$. Функция g называется билинейной, если для любых элементов $a, a_1, a_2 \in A$ и $c, c_1, c_2 \in C$ выполнены условия*

$$g(a_1 + a_2, c) = g(a_1, c) + g(a_2, c), \quad g(a, c_1 + c_2) = g(a, c_1) + g(a, c_2). \quad (1)$$

2. Пусть R – кольцо, A_R и ${}_RC$ – модули. Отображение $g : A \times C \to G$ называется сбалансированным (или R-сбалансированным), если выполнены условия (1) и кроме того, для любых $a \in A, c \in C, r \in R$: $g(ar, c) = g(a, rc)$.

Определение 1.2. *Пусть A, C – группы. Пусть X – свободная группа, свободными образующими которой являются все пары (a, c), где $a \in A, c \in C$. Обозначим через Y_Z подгруппу группы X, порожденную всеми элементами вида*

$$(a_1 + a_2, c) - (a_1, c) - (a_2, c) \quad , \quad (a, c_1 + c_2) - (a, c_1) - (a, c_2) \qquad (2)$$

для всех $a, a_1, a_2 \in A$ и $c, c_1, c_2 \in C$. Тензорное произведение A и C над кольцом Z определяется как

$$A \otimes_Z C = X/Y_Z.$$

Определение 1.3. *Пусть A_R, ${}_RC$ – модули, X – свободная группа, введенная в определении 1.2. Обозначим через Y_R подгруппу группы X, порожденную, кроме всех элементов вида (2), также элементами $(ar, c) - (a, rc)$, где $a \in A, c \in C, r \in R$. Тензорным произведением A и C над кольцом R называется факторгруппа*

$$A \otimes_R C = X/Y_R.$$

Пусть $h : S \to R$ – гомоморфизм колец, M – правый R-модуль. Полагая $m \circ s = m \cdot h(s)$ для любых $m \in M, s \in S$ получаем правый S-модуль M. Аналогично, левый R-модуль можно превратить в левый S-модуль. Такие S-модули называются притягивающими (см. [Ф1]).

Лемма 1.4 (Лемма о притяжении, [Ф1]). *Для кольцевого гомоморфизма $h : S \to R$ и R-модулей M_R, ${}_RN$ и ${}_RA$ имеют место гомоморфизмы:*

$$h_* : (M_S) \otimes_S ({}_SN) \to M \otimes_R N, \qquad x \otimes_S y \to x \otimes_R y;$$

$$h^* : Hom_R(A, N) \to Hom_S(({}_SA), ({}_SN)).$$

Если h – сюръективный гомоморфизм, то h_* и h^* – изоморфизмы.

Отметим, что справедлив канонический изоморфизм R-модулей $M \otimes_R R \cong M$, $m \otimes r \to mr$.

Теорема 1.5 (Теорема о разложении гомоморфизмов, [К2]). *Каждый кольцевой гомоморфизм $e : R \to S$ обладает разложением $e = e'v$,* *где* $v : R \to R/Ker(e)$ *– канонический сюръективный гомоморфизм, а* e' *– мономорфизм,*

$$e' : r + Ker(e) \to e(r).$$

Мономорфизм e' *является изоморфизмом тогда и только тогда, когда* e *сюръективен.*

Предложение 1.6 [Ф3]. *Пусть* A *и* C *– абелевы группы. Тогда* $r_0(A \otimes C) = r_0(A) \cdot r_0(C)$.

Предложение 1.7 (предложение Йонеды, [Ф1]). *Если* A *и* B *– объекты категории* C, *то функция Йонеды* $[h^A, h^B] \to Mor_C(B, A)$ *биективна. Основные ковариантные функторы* h^A *и* h^B *со значениями в категории множеств естественно эквивалентны в том и только в том случае, когда объекты* A *и* B *эквивалентны в категории* C.

Определение 1.8. *Модуль* A_R *называется образующим, если для любой пары* R*-модулей* M_R *и* N_R *и ненулевого* R*-модульного гомоморфизма* $g : M \to N$ *существует* R*-модульный гомоморфизм* $f : A \to M$ *такой, что* $gf \neq 0$.

Определение 1.9. *Модуль* A_R *называется кообразующим, если для любой пары* R*-модулей* M_R *и* N_R *и ненулевого* R*-модульного гомоморфизма* $g : M \to N$ *существует* R*-модульный гомоморфизм* $f : N \to A$ *такой, что* $fg \neq 0$.

Определение 1.10. Отображение f называется эпиморфизмом в категории C, если из равенства $g_1 f = g_2 f$ следует $g_1 = g_2$, то есть на f можно сокращать справа.

Определение 1.11. Пусть R – кольцо, A_R – модуль. Следуя [Sc1], кольцо R будем называть E-кольцом, если существует канонический изоморфизм $R \cong E(R^+)$, при котором любому элементу r соответствует левое умножение r_L кольца R на r. Кольцо R называется T-кольцом

[Bow1], если имеет место канонический изоморфизм $R \otimes_Z R \cong R$, где $a \otimes b \to ab$ для любых элементов $a, b \in R$. Модуль A_R называется $E(R)$-модулем [Pie1], если

$$Hom_Z(R, A) = Hom_R(R, A).$$

Пусть A_R – модуль. В тех случаях, когда кольцо R коммутативно, модуль A можно рассматривать как R-R-бимодуль. Пусть B_R – также модуль над кольцом R, $Hom_Z(A, B)$ – группа всех аддитивных гомоморфизмов из A в B, $Hom_R(A, B)$ – группа R-модульных гомоморфизмов. Будет рассматриваться также $A \otimes_Z B$ – тензорное произведение A и B как групп и $A \otimes_R B$ – их тензорное произведение как R-модулей. Вместо $A \otimes_Z B$ часто будем писать $A \otimes B$.

Предложение 1.12 [Pie1]. *Пусть A и B – модули над R, причем B – $E(R)$-модуль. Тогда $Hom(A, B) = Hom_R(A, B)$.*

Предложение 1.13 [Bow1]. *Всякое T-кольцо является E-кольцом.*

Далее будет применяться ряд анонсированных в [K3] фактов о центрах колец эндоморфизмов сепарабельных абелевых групп без кручения, часть которых для полноты изложения докажем.

Группа без кручения A называется сепарабельной, если всякое конечное множество ее элементов содержится в некотором вполне разложимом прямом слагаемом группы A. Обозначим через $\Omega(A)$ множество типов всех прямых слагаемых ранга 1 группы A. Будем считать, что два типа $s, t \in \Omega(A)$ эквивалентны, если существуют типы $r_1, ..., r_n \in \Omega(A)$ такие, что r_i и r_{i+1} сравнимы для всех $i = 0, 1, ..., n$, где полагаем $r_0 = s$ и $r_{n+1} = t$. Тогда множество $\Omega(A)$ разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности:

$$\Omega(A) = \bigcup_{k \in K} \Omega_k.$$

Предложение 1.14 [K3]. *Пусть A – сепарабельная группа без кручения. Для каждого $k \in K$ существует подгруппа $A_k \subseteq A$ такая, что $A = \oplus_{k\in K} A_k$, причем A_k – сепарабельная группа, $\Omega(A_k) = \Omega_k$ и слагаемое A_k вполне характеристично в A.*

Предложение 1.15 [K3]. *Для сепарабельной группы A без кручения следующие условия эквивалентны:*

1) центр $Z(E(A))$ изоморфен подкольцу поля Q;

2) группа A неразложима в прямую сумму ненулевых вполне характеристических подгрупп;

3) любые два типа $s, t \in \Omega(A)$ эквивалентны.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть существует разложение $A = B \oplus C$ группы A в прямую сумму двух ненулевых вполне характеристических подгрупп B и C. Существуют эндоморфизмы $\varphi_1 \in Z(E(B))$, $\varphi_2 \in Z(E(C))$, $\varphi_1, \varphi_2 \neq 0$. Например, можно взять тождественные отображения $\varphi_1 = i_B$, $\varphi_2 = i_C$. Далее, построим следующим образом $\phi_1, \phi_2 \in E(A)$. Пусть $\phi_1|_B = \varphi_1$ и $\phi_1|_C = 0$, аналогично $\phi_2|_C = \varphi_2$ и $\phi_2|_B = 0$. Тогда $\phi_1, \phi_2 \in Z(E(A))$. Действительно, возьмем произвольный эндоморфизм $\psi \in E(A)$. Для всех элемента $b \in B$ выполнено $\psi(b) \in B$, так как B – вполне характеристическая подгруппа в A, и тогда

$$\phi_1\psi(b) = \varphi_1\psi(b) = \psi\varphi_1(b) = \psi\phi_1(b).$$

Для элементов $c \in C$ имеем $\phi_1\psi(c) = \psi\phi_1(c) = 0$. Таким образом, $\phi_1 \in Z(E(A))$. Аналогично, $\phi_2 \in Z(E(A))$. По построению из $n_1\phi_1 + n_2\phi_2 = 0$ следует $n_1\phi_1 = n_2\phi_2 = 0$. Получили независимую систему из двух эндоморфизмов, которая принадлежит $Z(E(A))$. Таким образом, ранг кольца $Z(E(A))$ больше 1. Но $Z(E(A))$ – подкольцо поля Q. Следовательно, группа A не разлагается в прямую сумму двух ненулевых вполне характеристических подгрупп.

Эквивалентность 2) и 3) следует из предложения 1.14.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть A неразложима в прямую сумму ненулевых вполне характеристических подгрупп. Покажем, что тогда ранг аддитивной группы кольца $Z(E(A))$ равен 1. Очевидно, что для всех чисел n таких, что $nA = A$, умножение на $1/n$ есть эндоморфизм, принадлежащий $Z(E(A))$. Таким образом кольцо S, порожденное 1 и $1/p$ для всех p таких, что $pA = A$, является подкольцом центра кольца эндоморфизмов. Покажем, что $S = Z(E(A))$.

Поскольку любые типы s, t эквивалентны (предложение 1.14), то существует последовательность групп ранга 1, $A_1, ..., A_n$ такая, что типы двух соседних групп сравнимы, то есть либо $Hom(A_i, A_{i+1}) \neq 0$, либо $Hom(A_{i+1}, A_i) \neq 0$. Рассмотрим, например, группы A_1 и A_2. Возьмем эндоморфизм $\varphi \in End_Z A$ такой, что $0 \neq \varphi|_{A_1} \in Hom(A_1, A_2)$. Пусть $\varphi(a_1) = a_2$.

Пусть $\psi \in Z(E(A))$, но ψ не является умножением на рациональное число. Пусть для всех $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$: $\psi(a_1) = c_1 a_1$, $\psi(a_2) = c_2 a_2$, причем $c_1 \neq c_2$. Тогда $\varphi\psi(a_1) = \varphi(c_1 a_1) = c_1 \varphi(a_1)$, $\psi\varphi(a_1) = c_2 \varphi(a_1)$, что противоречит $\psi \in Z(E(A))$.

Получили, что $\psi \in Z(E(A))$ тогда и только тогда, когда ψ есть умножение на рациональное число $q \in S$. То есть, $Z(E(A))$ – подкольцо поля Q. $\square$

Следствие 1.16 [К3]. *Пусть центр $Z(E(A))$ изоморфен некоторому подкольцу поля Q. Тогда $Z(E(A))$ порождается единицей и всеми числами $1/p$ такими, что $pA = A$, то есть $Z(E(A)) = \{m/n \in Q | nA = A\}$.*

Предложение 1.17 [К3]. *Для сепарабельной группы A без круче-*

ния следующие условия эквивалентны:

1) $E(A)$ *– коммутативное кольцо;*

2) $A = \oplus_{i \in I} A_i$, *где* A_i *– группы ранга 1 с попарно несравнимыми типами.*

Доказательство. Согласно проведенным ранее рассуждениям, A есть прямая сумма вполне характеристических подгрупп. Пусть хотя бы одна из этих подгрупп имеет ранг больше 1. Тогда она содержит некоторое вполне разложимое прямое слагаемое ранга 2, $A_1 \oplus A_2$, причем $Hom(A_1, A_2) \neq 0$ или $Hom(A_2, A_1) \neq 0$. Проводя рассуждения, аналогичные доказательству 2) $\Rightarrow$ 1) предложения 1.15, получим, что всякий эндоморфизм ψ, не являющийся умножением на рациональное число, не будет принадлежать $Z(E(A))$. Следовательно, $E(A)$ некоммутативно. Итак, если $E(A)$ коммутативно, то A разлагается в прямую сумму групп ранга 1 несравнимых типов.

Обратно, если группа A является прямой суммой групп A_i ранга 1 несравнимых типов, то $E(A)$ изоморфно произведению колец $E(A_i)$. Такое кольцо $E(A)$ коммутативно. $\square$

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. КОЛЬЦЕВЫЕ ГОМОМОРФИЗМЫ $e : S \to R$ И ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ НАД РАЗЛИЧНЫМИ КОЛЬЦАМИ

Все кольцевые гомоморфизмы считаем переводящими единицу в единицу. Центр кольца R обозначаем $Z(R)$. Введем понятие $T(R)$-модуля.

Определение 2.1. *Модуль A_R назовем $T(R)$-модулем, если канонический эпиморфизм $A \otimes_Z R \to A$, $a \otimes r \to ar$ является изоморфизмом.*

Определение 2.1.' *Модуль A_R назовем $T(R)$-модулем, если существует канонический изоморфизм $A \otimes_Z R \to A \otimes_R R$, $a \otimes_Z r \to a \otimes_R r$.*

Эквивалентность определений 2.1 и 2.1' доказывается с помощью канонического изоморфизма $A \otimes_R R \cong A$.

Аналогично, с помощью канонического изоморфизма $R \otimes_R A \cong R \otimes_Z A$, определяются левые $T(R)$-модули. Левый и правый случаи не различаются, если кольцо R коммутативно.

Понятия E- и T-колец, E-модулей в смысле [Sc1], [Bow1], [Pie1] и T-модулей могут быть обобщены следующим образом. Введем в рассмотрение кольцо S так, что существует кольцевой гомоморфизм $e : S \to R$. При этом каждый R-модуль естественным образом превращается в притягивающий S-модуль: $a \circ s = a \cdot e(s)$ для любых $a \in A$ и $s \in S$ [Ф1]. В частности, имеем S-модули $_S R$ и R_S. В этом случае можно определить $A \otimes_S R$ и $Hom_S(R, A)$ (следуя [K2], будем называть их соответственно ковариантным и контравариантным расширением модуля A_R). Группа $Hom_S(R, A)$ состоит из всех S-модульных гомоморфизмов $R \to A$, $A \otimes_S R$ – тензорное произведение A_S и $_S R$ как S-модулей. Гомоморфизм $e : S \to R$ называется центральным, если $e(S) \subseteq Z(R)$.

Заметим, что имеется единственный гомоморфизм $Z \to R$ и он централен. Пусть $e : S \to R$ – центральный гомоморфизм (в таком случае кольцо $e(S)$ коммутативно), A – правый R-модуль и притягивающий S-модуль. Полагая $sa = as$ для всех $s \in S, a \in A$, получаем структуру левого S-модуля на A. Можно не различать модули ${}_SA$ и A_S. В частности, можно не различать модули ${}_SR$ и R_S.

Определение 2.2. *1) Модуль A_R будем называть T-модулем относительно гомоморфизма $e : S \to R$, или $T(e)$-модулем, если существует канонический изоморфизм $A \otimes_S R \to A \otimes_R R$, $a \otimes_S r \to a \otimes_R r$.*
2) Модуль A_R будем называть E-модулем относительно гомоморфизма $e : S \to R$, или $E(e)$-модулем, если $Hom_S(R, A) = Hom_R(R, A)$.
3) Кольцо R будем называть T-кольцом относительно гомоморфизма $e : S \to R$, или $T(e)$-кольцом, если существует канонический изоморфизм $R \otimes_S R \to R \otimes_R R$.
4) Кольцо R будем называть правым E-кольцом относительно гомоморфизма $e : S \to R$, или правым $E(e)$-кольцом, если $End_S(R_S) = End_R(R_R)$.
5) Будем называть T-модуль (E-модуль) абсолютным T- (E-) модулем, или $T(R)$- ($E(R)$-)модулем, если он является T- или E-модулем относительно любого кольца S и любого гомоморфизма $e : S \to R$.

Аналогично можно определить T- и E-модули для левых R-модулей, а также определить левые E-кольца. Понятие T-кольца лево-право симметрично.

Определенные в 1.11 и 2.1 E- и T-модули, соответствуют случаю $S = Z$ и $e : Z \to R$. Таким образом, в [Pie1] исследовались абсолютные E-модули.

Обозначим через $\mathcal{E}(R)$ класс всех групп, на которых существует структура $E(R)$-модуля относительно гомоморфизма $e : Z \to R$; через $\mathcal{T}(R)$ – класс всех групп, на которых существует структура $T(R)$-модуля относительно гомоморфизма $e : Z \to R$.

Определения 2.1 и 2.2 являются основными в диссертации. T-модули будут изучаться на протяжении всей работы.

E- или T-модули относительно гомоморфизма e можно определить, используя понятия ковариантного и контравариантного e-расширений $A_{(e)} = A \otimes_S R$ и $A^{(e)} = Hom_S(R, A)$ (см. [K1]). При этом задачу об изучении E- и T-модулей можно сформулировать следующим образом: исследовать, для каких колец S, R, кольцевого гомоморфизма $e : S \to R$ и модуля A_R существует канонический изоморфизм между модулем и его ковариантным (либо контравариантным) расширением.

Предложение 2.3. *Модуль A_R является абсолютным E-модулем (T-модулем) тогда и только тогда, когда он является E-модулем (T-модулем) относительно гомоморфизма $e : Z \to R$.*

Доказательство. Если A_R является абсолютным E-модулем (T-модулем), то есть E- (T-)модулем относительно любых S и $e : S \to R$, то очевидно, что он является E-модулем (T-модулем) относительно $e : Z \to R$, поэтому требуется доказать только достаточность.

1. Пусть A является E-модулем относительно $e : Z \to R$. Это означает, что выполнено равенство $Hom_Z(R, A) = Hom_R(R, A)$. Другими словами, все аддитивные гомоморфизмы из R в A являются R-модульными. В частности, все S-модульные гомоморфизмы являются R-модульными, то есть $Hom_S(R, A) = Hom_R(R, A)$.

2. Пусть $A \otimes_Z R \cong A \otimes_R R$. Известно, что

$$A \otimes_S R \cong (A \otimes_Z R)/\{< as \otimes r - a \otimes sr >, s \in S\}$$

и существуют канонические эпиморфизмы $t_1 : A \otimes_Z R \to A \otimes_S R$ и $t_2 : A \otimes_S R \to A \otimes_R R$. Понятно, что тогда $A \otimes_S R \cong A \otimes_R R$ канонически. $\square$

Далее решается вопрос о зависимости условия, определяющего T-модуль, от выбора кольцевого гомоморфизма $e : S \to R$. Существенна ли эта зависимость в случае, когда рассматриваются различные кольцевые гомоморфизмы $e, h : S \to R$?

Теорема 2.4. *Пусть R, S – кольца и существует кольцевой гомоморфизм $e : S \to R$. Модуль A_R является T-модулем (E-модулем) относительно e тогда и только тогда, когда он является T-модулем (E-модулем) относительно любого гомоморфизма колец $h : S \to R$, для которого $e(S) = h(S)$.*

Доказательство. Прежде всего покажем, что если заданы кольца S, K, R и гомоморфизмы колец $\rho : S \to K$ и $e : K \to R$, причем ρ сюръективен, то имеют место две эквивалентности условий:

$$A \otimes_R R \cong A \otimes_S R \Leftrightarrow A \otimes_R R \cong A \otimes_K R, \tag{3}$$

$$Hom_R(R, A) = Hom_S(R, A) \Leftrightarrow Hom_R(R, A) = Hom_K(R, A). \tag{4}$$

Отметим, что каждый R-модуль естественным образом превращается в K-модуль и S-модуль. Так как ρ сюръективен, то по лемме о притяжении (лемма 1.4) для любых K-модулей A_K и ${}_KM$ верно следующее:

$$(A_S) \otimes_S ({}_SM) \cong A \otimes_K M,$$

$$Hom_S(M, A) = Hom_K(M, A).$$

В частности, полагая $M = R$, имеем $Hom_S(R, A) = Hom_K(R, A)$ (соответственно, $A \otimes_K R \cong A \otimes_S R$). Теперь пусть $A \otimes_R R \cong A \otimes_K R$. Отсюда сразу следует, что $A \otimes_R R \cong A \otimes_K R \cong A \otimes_S R$. Обратно, если $A \otimes_R R \cong A \otimes_S R$, то $A \otimes_R R \cong A \otimes_K R$. Отсюда можно заключить, что имеет место эквивалентность (3). Аналогичным образом доказывается (4).

Пусть теперь $K = e(S)$. По теореме о разложении гомоморфизмов (теорема 1.5) для $e : S \to R$ имеем разложение $e = i \cdot \rho$, где $\rho : S \to e(S)$ сюръективен, i – мономорфизм, причем i является изоморфизмом тогда и только тогда, когда e сюръективен. Итак, имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "e"] \arrow[dr, "\rho"'] & & R \\ & e(S) \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd},$$

где ρ – сюръективный гомоморфизм. В этом случае верны следующие эквивалентности (5) и (6):

$$A \otimes_R R \cong A \otimes_S R \Leftrightarrow A \otimes_R R \cong A \otimes_{e(S)} R, \tag{5}$$

$$Hom_R(R, A) = Hom_S(R, A) \Leftrightarrow Hom_R(R, A) = Hom_{e(S)}(R, A). \tag{6}$$

Таким образом, A является T-модулем (E-модулем) относительно e тогда и только тогда, когда он есть T-модуль (E-модуль) относительно i. Отсюда следует утверждение теоремы. □

Следствие 2.5. *Пусть R, S – кольца, $e : S \to R$ – гомоморфизм колец, $i : e(S) \to R$ – вложение подкольца $e(S)$ в кольцо R, A_R – модуль. Тогда A_R является $T(R)$-модулем ($E(R)$-модулем) относи-*

тельно гомоморфизма e тогда и только тогда, когда A_R является $T(R)$-модулем ($E(R)$-модулем) относительно гомоморфизма i.

Итак, задачу об изучении T-модулей относительно гомоморфизма $e : S \to R$ можно, не ограничивая общности, свести к случаю, когда $Ker\, e = 0$; кроме того, e можно рассматривать как естественное вложение подкольца S в R.

Замечание. Во всех проведённых выше рассмотрениях считаем $A \otimes_S R$ и $Hom_S(R, A)$ абелевыми группами. Если $S \subseteq Z(R)$, то сформулированные утверждения верны для этих конструкций и как для S-модулей.

Свойство кольца быть E-кольцом накладывает значительные ограничения на кольцевые эндоморфизмы.

Предложение 2.6. *Пусть R – E-кольцо относительно $e : S \to R$ и γ - эндоморфизм кольца R, тождественный на $e(S)$. Тогда γ – тождественный автоморфизм кольца R.*

Доказательство. Для $x \in R$ и $s \in S$ имеем $\gamma(xs) = \gamma(xe(s)) = \gamma(x)\gamma(e(s)) = \gamma(x)e(s) = \gamma(x)s$. Значит, γ – S-модульный эндоморфизм. Так как R – $E(R)$-модуль, то γ будет эндоморфизмом R-модуля. Итак, $\gamma(x)r = \gamma(xr) = \gamma(x)\gamma(r)$ для всех $x, r \in R$. При $x = 1_R$ получаем $\gamma(r) = r$.

Следствие 2.7. *Если R – абсолютное E-кольцо, то единственным кольцевым эндоморфизмом кольца R является тождественный автоморфизм.*

ГЛАВА 2

ОБЩИЕ СВОЙСТВА T-МОДУЛЕЙ

Основная цель этой главы – получить критерии и характеризации $T(R)$-модулей с помощью тензорных произведений либо групп гомоморфизмов. Изучаются также взаимосвязи между E- и T-модулями.

§ 3. МОДУЛЬ R_0 И КРИТЕРИЙ $T(R)$-МОДУЛЬНОСТИ

В этом параграфе будет получен критерий, показывающий, что при изучении T-модулей важную роль играет S-модуль $R/e(S)$ (для абсолютных T-модулей – группа $R/<1>$, где $<1>$ – циклическая подгруппа группы R^+, порожденная 1_R). Если $e(S) \neq R$, то $e(S)$ не является идеалом, а $R/e(S)$ – кольцом. Однако на $R/e(S)$ можно определить структуру левого S-модуля. Далее будут рассматриваться притягивающие левые S-модули ${}_SR$ и ${}_S(R/e(S))$.

Теорема 3.1. *Пусть $e : S \to R$ – гомоморфизм колец. Модуль A_R является T-модулем тогда и только тогда, когда $A \otimes_S (R/e(S)) = 0$.*

Доказательство. Точная последовательность левых S-модулей

$$0 \to S \xrightarrow{e} R \longrightarrow R/e(S) \to 0$$

индуцирует точную последовательность

$$A \otimes_S S \overset{1\otimes e}{\to} A \otimes_S R \to A \otimes_S (R/e(S)) \to 0.$$

Воспользуемся каноническими изоморфизмами $A \otimes_S S \cong A$, $A \otimes_R R \cong A$ и гомоморфизмом $h : A \otimes_S R \to A \otimes_R R$, $h(a \otimes_S r) = a \otimes_R r$. Отождествим $A \otimes_S S$ с A. Допустим, что $(1 \otimes e)(a) = 0$ для некоторого $a \in A$. Тогда $0 = h(1 \otimes e)(a) = h(a \otimes_S 1) = a \otimes_R 1$, что влечет $a = 0$. Таким образом, гомоморфизм $1 \otimes e$ инъективен. Отсюда следует, что точна последовательность

$$0 \to A \overset{1\otimes e}{\to} A \otimes_S R \to A \otimes_S (R/e(S)) \to 0.$$

Следовательно, $1 \otimes e$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда отображение $1 \otimes e$ сюръективно, а это эквивалентно тому, что

$$A \otimes_S (R/e(S)) = 0. \square$$

Можем записать коммутативную диаграмму S-модулей:

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes_S S \arrow[r, "1\otimes e"] \arrow[d, "k"'] & A \otimes_S R \arrow[d, dash] & & \\
0 \arrow[r] & A \otimes_S e(S) \arrow[r, "g"] & A \otimes_S R \arrow[r] & A \otimes_S R_0 \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

в которой все отображения – индуцированные, причем k – изоморфизм, g – мономорфизм.

Следствие 3.2. *Модуль A_R является T-модулем относительно гомоморфизма $e : Z \to R$ тогда и только тогда, когда $A \otimes_Z R/ < 1_R >= 0$.*
$\square$

Рассмотрим такую иллюстрацию. Возьмем делимую группу без кручения A. На ней можно задать структуру модуля над кольцом рациональных чисел Q. Известно, что в этом случае существует канонический изоморфизм $A \otimes_Z Q \cong A$. Можно сказать, что A_Q является $T(Q)$-модулем, причем $A \otimes_Z Q/ < 1 >= A \otimes_Z Q/Z = 0$, так как A – делимая группа, а Q/Z – периодическая.

Из доказанного утверждения также следует, что существуют кольца, над которыми ни один ненулевой модуль не является T-модулем.

Пример 3.3. Пусть $R = Z \times Z$. Тогда $R_0 = R/ < 1_R > \cong Z$. Если теперь A_R – модуль, то

$$A \otimes_Z R_0 \cong A \otimes_Z Z \cong A.$$

То есть, не существует ненулевого R-модуля A, для которого выполнено равенство $A \otimes_Z R_0 = 0$. Таким образом, канонический изоморфизм $A \otimes_Z R \cong A$ невозможен.

Пример 3.4. Пусть $R = Q_p^*$ – кольцо целых p-адических чисел. Каждая p-группа A_p естественным образом превращается в модуль над Q_p^*. Рассмотрим тензорное произведение $A \otimes_Z R/ < 1 >$. Группа $Q_p^*/ < 1 >$ p-делима, следовательно, $A_p \otimes (Q_p^*/ < 1 >) = 0$. Итак, любая p-группа является T-модулем над кольцом Q_p^*.

В [K1] отмечен факт разложения ковариантного и контравариантного расширений в прямые суммы. Следующая теорема устанавливает вид дополнительного слагаемого.

Теорема 3.5. *Пусть $e : S \to R$ – гомоморфизм колец, A_R – модуль. Существует канонический изоморфизм правых S-модулей*

$$A \otimes_S R \cong (A \otimes_R R) \oplus (A \otimes_S (R/e(S))).$$

Доказательство. Обозначим $R_0 = R/e(S)$. Рассмотрим эпиморфизм $\pi : A \otimes_S R \to A \otimes_R R$, $\pi(a \otimes_S r) = ar \otimes_R 1_R$. Здесь $A \otimes_S R$ и $A \otimes_R R$ – канонические правые R-модули и S-модули, причем последний является притягивающим, а π – модульный гомоморфизм.

Отметим, что для любых $a \in A$ и $s \in S$ справедливо равенство $a \otimes_S e(s) = ae(s) \otimes_S 1_R$. Действительно, учитывая определение притягивающего S-модуля, имеем $a \otimes_S e(s) = a \otimes_S e(s)1_R = a \otimes_S s1_R = as \otimes_S 1_R = ae(s) \otimes_S 1_R$.

Введем гомоморфизм S-модулей $\rho : A \otimes_R R \to A \otimes_S R$ по правилу $\rho : a \otimes_R r \to ar \otimes_S 1_R$. Для элементов $a \in A, r \in R$ получаем $\pi\rho(a \otimes_R r) = \pi(ar \otimes_S 1_R) = ar \otimes_R 1_R = a \otimes_R r$. Следовательно, $\pi\rho$ действует тождественно на $A \otimes_R R$, а π расщепляется, то есть $A \otimes_S R = Im\,\rho \oplus Ker\,\pi$. Подмодуль $Im\,\rho$ равен $\{a \otimes_S 1_R | a \in R\}$, а $Ker\,\pi$ порождается всеми элементами вида $a \otimes_S r - ar \otimes_S 1_R$, где $a \in A, r \in R$. При этом $a \otimes_S r = (ar \otimes_S 1_R) + (a \otimes_S r - ar \otimes_S 1_R)$.

Представим по-иному подмодуль $Ker\,\pi$. Для этого запишем индуцированную точную последовательность S-модулей

$$A \otimes_S e(S) \xrightarrow{f} A \otimes_S R \xrightarrow{g} A \otimes_S R_0 \to 0.$$

Проверим, что $Im\,\rho = Ker\,g$. Для элемента $a \otimes_R r \in A \otimes_R R$ получаем $g\rho(a \otimes_R r) = g(ar \otimes_S 1_R) = 0$ и $Im\,\rho \subseteq Ker\,g$. Поскольку $Im\,f = Ker\,g$, то осталось убедиться, что $Im\,f \subseteq Im\,\rho$. Возьмем элемент $a \otimes_S e(s) \in A \otimes_S e(S)$. Тогда $f(a \otimes_S e(s)) = a \otimes_S e(s) \in A \otimes_S R$. Поэтому $a \otimes_S e(s) = ae(s) \otimes_S 1_R \in Im\,\rho$. Итак, $Im\,\rho = Ker\,g$. Запишем канонические изоморфизмы S-модулей

$$Ker\,\pi \cong (A \otimes_S R)/Im\,\rho = (A \otimes_S R)/Ker\,g \cong Im\,g = A \otimes_S R_0.$$

Откуда $Ker\,\pi \cong A \otimes_S R_0$. При этом соответствие образующих элементов

$$a \otimes_S r - ar \otimes_S 1_R \to a \otimes_S (r + e(S)), a \in A, r \in R$$

и задает полученный изоморфизм S-модулей $Ker\,\pi$ и $A \otimes_S R_0$. Осталось заметить, что $Im\,\rho \cong A \otimes_R R$. $\square$

Далее обобщим для произвольного гомоморфизма $e : S \to R$ некоторые результаты, которые верны для абсолютных E-колец и E-модулей.

Предложение 3.6. *Пусть $e : S \to R$ – гомоморфизм колец, A_R – модуль. Тогда A_R является $E(e)$-модулем тогда и только тогда, когда*

$$Hom_S(R/e(S), A) = 0.$$

Доказательство. Точная последовательность

$$0 \to S \xrightarrow{e} R \longrightarrow R/e(S) \to 0$$

индуцирует точную последовательность

$$0 \to Hom_S(R/e(S), A) \longrightarrow Hom_S(R, A) \xrightarrow{h} Hom_S(S, A),$$

где $h = e^*$ – индуцированный гомоморфизм. На самом деле h – эпиморфизм. Пусть $\alpha \in Hom_S(S, A)$. Зададим $\beta \in Hom_S(R, A)$ как $\beta(r) = \alpha(1_S)r$ для каждого $r \in R$. Тогда $h(\beta) = \alpha$. Действительно, имеем $h(\beta)(s) = (\beta e)(s) = \beta(e(s)) = \alpha(1_S)e(s) = \alpha(1_S)s = \alpha(s)$, где $s \in S$. Откуда $h(\beta) = \alpha$. Учитывая $Hom_S(S, A) \cong A$, имеем, что модуль A изоморфен своему контравариантному расширению тогда и только тогда, когда отображение h биективно. Это эквивалентно тому, что $Hom_S(R/e(S), A) = 0$. $\square$

Предложение 3.7. *Пусть $e : S \to R$ – гомоморфизм колец, A_R – модуль. Существует канонический изоморфизм правых S-модулей*

$$Hom_S(R, A) \cong Hom_R(R, A) \oplus Hom_S(R/e(S), A).$$

Доказательство. Пусть $\rho : Hom_R(R, A) \to Hom_S(R, A)$ – естественное вложение. Построим отображение $\pi : Hom_S(R, A) \to Hom_R(R, A)$, обратное к ρ, полагая $\pi(\varphi) = \varphi_1$ для $\varphi \in Hom_S(R, A)$, где $\varphi_1(r) = \varphi(1) \cdot r$ при всех $r \in R$. Очевидно, φ_1 является R-модульным гомоморфизмом, а π сохраняет сумму. Для $s \in S$ можно записать $\pi(\varphi s)(r) = (\varphi s)_1(r) = (\varphi s)(1_R)r = \varphi(s1_R)r = \varphi(1_R s)r = \varphi(1_R)(sr)$ и $(\pi(\varphi)s)(r) = \pi(\varphi)(sr) = \varphi_1(sr) = \varphi(1_R)(sr)$. Откуда $\pi(\varphi s) = \pi(\varphi)s$ и π – S-гомоморфизм.

Пусть $\varphi \in Hom_R(R, A), r \in R$. Тогда $(\pi\rho(\varphi))(r) = \rho(\varphi)(1_R)r = \varphi(1_R)r = \varphi(r)$. Значит, $\pi\rho = 1$ на $Hom_R(R, A)$ и ρ расщепляется. Таким образом, $Hom_S(R, A) = Im\,\rho \oplus Ker\,\pi = Hom_R(R, A) \oplus \{\varphi \in Hom_S(R, A) | \varphi(1_R) = 0\}$, где $\varphi = \varphi_1 + (\varphi - \varphi_1)$ для $\varphi \in Hom_S(R, A)$. Заметим еще, что $\varphi(re(s)) = \varphi(rs) = \varphi(r)s = \varphi(r)e(s)$ $(r \in R, s \in S)$. Возьмем теперь $\varphi \in Ker\,\pi, s \in S$ и вычислим $\varphi(e(s)) = \varphi(1_R e(s)) = \varphi(1_R)e(s) = 0$. Заключаем, что $Ker\,\pi = \{\varphi \in Hom_S(R, A) | \varphi(e(S)) = 0\}$. Последний же модуль можно отождествить с $Hom_S(R/e(S), A)$. □

Предложение 3.8. *Пусть R, S – кольца, $e : S \to R$ – центральный гомоморфизм, R – T-кольцо. Тогда*

1) R – E-кольцо;

2) всякое факторкольцо кольца R является T-кольцом.

Доказательство. 1) Имеем последовательность канонических изоморфизмов $Hom_S(R, R) \cong Hom_S(R, Hom_R(R, R)) \cong Hom_R(R \otimes_S R, R) \cong Hom_R(R, R)$ и R – E-кольцо.

2) Пусть $K-$ идеал кольца R, $\chi : R \to R/K-$ канонический гомоморфизм. Имеется в виду, что $R/K-$ T-кольцо относительно гомоморфизма $\chi e : S \to R/K$. По теореме 3.1 $R \otimes_S R/e(S) = 0$. Из $(R/K)/(\chi e)S \cong R/(e(S) + K)$ выводим $R/K \otimes_S (R/K)/(\chi e)S = 0$ и $R/K-$ T-кольцо по теореме 3.1. □

Предложение 3.9. *Пусть $e : S \to R-$ центральный гомоморфизм и R – E-кольцо. Тогда R – коммутативное кольцо.*

Доказательство. Для элемента $a \in R$ обозначим через ρ_a эндоморфизм правого умножения кольца R на a, $\rho_a(x) = xa, \quad x \in R$.

Для любых $x \in R$, $s \in S$ имеем $\rho_a(xs) = (xs)a = (xa)s = \rho_a(x)s$. Значит, $\rho_a \in End_S R = End_R R$. Поэтому $\rho_a(x) = \rho_a(1_R)x, x \in R$. Откуда $xa = \rho_a(x) = \rho_a(1_R)x = ax$. $\square$

Далее объединим в одно утверждение некоторые факты о модулях над T-кольцами. Данные факты в других терминах содержатся или напрямую вытекают из [Bow1],[Si1]. Здесь приведем их доказательство в единообразном виде, формулируя данные утверждения для T-колец, E- и T-модулей относительно гомоморфизма $e : S \to R$.

Следствие 3.10. *Пусть R, S – кольца, $e : S \to R$ – гомоморфизм колец. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*
1) кольцо R является T-кольцом;
2) всякий модуль A_R является T-модулем;
3) всякий модуль A_R является E-модулем.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $R \otimes_S R \cong R \otimes_R R$. Тогда для произвольного R-модуля A имеем последовательность канонических изоморфизмов

$$A \otimes_S R \cong (A \otimes_R R) \otimes_S R \cong A \otimes_R (R \otimes_S R) \cong A \otimes_R R.$$

Для доказательства 2) $\Rightarrow$ 1) достаточно положить $A_R = R_R$.

1) $\Rightarrow$ 3). Имеем последовательность канонических изоморфизмов

$$Hom_S(R, A) \cong Hom_S(R, Hom_R(R, A)) \cong Hom_R(R \otimes_S R, A) \cong$$

$$\cong Hom_R(R \otimes_R R, A) \cong Hom_R(R, Hom_R(R, A)) \cong Hom_R(R, A).$$

Таким образом, A является E-модулем относительно гомоморфизма $e : S \to R$.

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть все R-модули являются E-модулями относительно e. Рассмотрим правый R-модуль $R_0 \otimes_S R$, где $R_0 = R/e(S)$. $R_0 \otimes_S R$ –

E-модуль. Поэтому по предложению 3.6 имеем $Hom_S(R_0, R_0 \otimes_S R) = 0$. Теперь можно утверждать, что $R_0 \otimes_S R = 0$. В противном случае существует ненулевой S-гомоморфизм $\varphi : R_0 \to R_0 \otimes_S R$, $\overline{x} \to \overline{x} \otimes 1_R$. Таким образом, $R_0 \otimes_S R = 0$ и R – T-кольцо по теореме 3.1. $\square$

§ 4. СВОЙСТВА ГРУППЫ $Hom_Z(A, B)$ В СЛУЧАЕ, КОГДА A_R ЯВЛЯЕТСЯ $T(R)$-МОДУЛЕМ. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ T-МОДУЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ ГРУПП ГОМОМОРФИЗМОВ

Пусть A_R – $T(R)$-модуль. Будем рассматривать свойства групп $Hom_S(A, B)$ и $Hom_R(A, B)$ для некоторого модуля B_R.

Предложение 4.1. *Пусть R, S – кольца, $e : S \to R$ – гомоморфизм колец, A_R , B_R – правые R-модули, причем A_R является T-модулем. Тогда $Hom_S(A, B) = Hom_R(A, B)$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность естественных изоморфизмов:

$$Hom_R(A_R, B_R) \cong Hom_R(A \otimes_R R, B_R) \cong Hom_R(A \otimes_S R, B_R) \cong$$

$$Hom_S(A, Hom_R(R, B)) \cong Hom_S(A, B).$$

Итак, $Hom_R(A_R, B_R) \cong Hom_S(A, B)$. Но поскольку $Hom_R(A_R, B_R) \subseteq Hom_S(A, B)$ и любому гомоморфизму $A_R \to B_R$ соответствует он сам, то получаем требуемое равенство. □

Аналогичное утверждение верно и в случае, когда A и B – левые R-модули.

Особый интерес для дальнейшего представляет случай $S = Z$. Запишем такое утверждение.

Следствие 4.2. *Пусть R – кольцо, A_R – модуль. Если A_R является абсолютным T-модулем, то для любого модуля M_R выполнено равенство*

$$Hom_Z(A, M) = Hom_R(A, M). \qquad \square$$

Замечание. Получается, что если A_R является абсолютным T-модулем, то $E(A) = End_R A$. Аналогично, дуальный модуль $A^* = Hom_R(A, R)$

совпадает с группой аддитивных гомоморфизмов $Hom_Z(A, R)$.

Напомним, что обозначения $\mathcal{T}(R)$ и $\mathcal{E}(R)$ введены в начале § 1.

Предложение 4.3. *Если A_R – T-модуль относительно гомоморфизма $e : S \to R$, то $Hom_Z(A, B)$ является левым $E(R)$-модулем относительно e.*

Доказательство. Пусть R – кольцо, A_R, B_R – модули, причем A_R – $T(R)$-модуль. Тогда на группе $Hom_Z(A, B)$ можно определить структуру левого R-модуля с помощью модульного умножения:

$$(r \cdot \varphi)(a) = \varphi(ar), \qquad a \in A,\ r \in R,\ \varphi \in Hom_Z(A, B).$$

Заметим, что $Hom_Z(A, B)$ является также притягивающим левым S-модулем. Построим последовательность канонических изоморфизмов

$$Hom_S(R, Hom_Z(A, B)) \overset{(1)}{\cong} Hom_Z(A \otimes_S R, B) \overset{(2)}{\cong}$$
$$\overset{(2)}{\cong} Hom_Z(A \otimes_R R, B) \overset{(3)}{\cong} Hom_R({}_RR, {}_RHom_Z(A, B)).$$

Здесь изоморфизмы (1) и (3) следуют из сопряженности функторов $\otimes$ и Hom, изоморфизм (2) существует, так как по условию A_R – T-модуль. Получаем, что $Hom_Z(A, B)$ – левый E-модуль относительно $e : S \to R$. □

Замечание. Из предложения 4.3 следует, что если над кольцом R есть T-модули, то над ним обязательно существуют и E-модули, а именно $Hom_Z(A, B)$, $End_Z A$.

Предложение 4.4. *Пусть ${}_RA$ – T-модуль. Тогда $R_L \subseteq Z(E(A))$, где R_L – кольцо левых умножений модуля A на элементы кольца R.*

Доказательство. Согласно следствию 4.2, если A есть T-модуль над R, то $E(A) = End_R(A)$. То есть, для каждого аддитивного эндоморфизма группы A выполняется равенство $\varphi(ra) = r\varphi(a)$. Любое отображение вида $a \to ra$ можно отождествить с эндоморфизмом левого умножения на элемент r, то есть существует $\varphi_r : A \to A$ такой, что $ra = \varphi_r(a)$ для любого элемента $a \in A$. Поэтому $\varphi \cdot \varphi_r(a) = \varphi(\varphi_r(a)) = \varphi_r(\varphi(a)) = \varphi_r \cdot \varphi(a)$, то есть φ_r перестановочен со всеми эндоморфизмами $\varphi \in E(A)$. Значит, φ_r принадлежит центру кольца эндоморфизмов $E(A)$. Поскольку элемент r был выбран произвольно, то $R_L \subseteq Z(E(A))$. $\square$

Предложение 4.5. *Пусть R – коммутативное кольцо, A_R – $T(e)$-модуль, G – некоторая абелева группа. Тогда*
1) каждое S-сбалансированное отображение $f : A \times R \to G$ является R-сбалансированным;
2) для всякого S-сбалансированного отображения f верно, что если для всех элементов $a \in A$ выполняется $f(a, 1_R) = 0$, то $f = 0$.

Доказательство. 1) Пусть A – T-модуль. Имеем канонический изоморфизм $A \otimes_S R \cong A \otimes_R R$. Тогда $f : A \times R \to G$ – S-сбалансированное отображение, то есть для любых элементов $a \in A, r \in R, s \in S$ верно равенство $f(as, r) = f(a, sr)$. Покажем, что это равенство выполняется для любого $s \in R$. Поскольку $A \otimes_S R \cong A \otimes_R R$, то в группе $X =< (a, r) >$, определяемой при построении тензорных произведений над тем или иным кольцом, подгруппы Y_S и Y_R совпадают. Действительно, всегда имеется включение $Y_S \subseteq Y_R$. Если предположить, что обратного включения нет, то существует некоторый элемент $(as, r) - (a, sr) \in Y_R$, но $(as, r) - (a, sr) \notin Y_S$. Тогда $A \otimes_S R = X/Y_S$ и $A \otimes_R R = X/Y_R$ не будут канонически изоморфны. Поэтому все элементы вида $c = (as, r) - (a, sr)$, где $s, r \in R$, принадлежат Y_S, и $f(c) = 0$, следовательно, $f(as, r) = f(a, sr)$ при всех $s \in R$.

2). Пусть каждое S-сбалансированное отображение является R-сбалансированн

Рассмотрим S-сбалансированное отображение
$f : A \times R \to G$, и пусть $f(a, 1_R) = 0$ для всех $a \in A$. Поскольку f также является R-сбалансированным, то $f(a, r) = f(ar, 1) = 0$ для всяких $a \in A, r \in R$. Следовательно, $f = 0$. $\square$

Замечание. Для абсолютного T-модуля в условиях 1) и 2) S-сбалансированност отображения заменяется на билинейность. То есть если даны R-модули A_R и ${}_RC$ и хотя бы один из них является абсолютным T-модулем, то для группы P билинейная функция $f : A \times C \to P$ является сбалансированным над R отображением.

Из предложения 1.12 видно, что класс E-модулей может быть охарактеризован следующим образом. Это такие модули B_R, что для любого R-модуля A всякий аддитивный гомоморфизм из A в B является R-модульным. Действительно, в [Pie1] установлено, что если B_R является E-модулем, то $Hom_Z(A, B) = Hom_R(A, B)$ для любого модуля A_R. Заметим, что если это равенство имеет место для любого модуля A_R, то оно справедливо и для правого регулярного модуля R_R, что как раз дает определение E-модуля. То есть описанное свойство можно рассматривать в качестве эквивалентного определения E-модуля. Поэтому естественно поставить вопрос: можно ли охарактеризовать класс $T(R)$-модулей как такой класс модулей A_R, что для любого модуля B_R всякий аддитивный гомоморфизм из A в B является модульным? Ответ оказывается положительным. Сформулируем следующую теорему.

Теорема 4.6. *Пусть R, S – кольца, $e : S \to R$ – гомоморфизм колец, A_R – модуль. Тогда следующие условия эквивалентны:*
1) A – $T(e)$-модуль;
2) для всякого R-модуля B верно равенство $Hom_S(A, B) = Hom_R(A, B)$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Имеем $A\otimes_S R\cong A\otimes_R R$. Поскольку $B\cong Hom_R(R,B)$, то

$$Hom_S(A,B)\cong Hom_S(A,Hom_R(R,B)). \tag{1}$$

Применяя свойство сопряженности функторов $\otimes$ и Hom к правой части (1), приходим к такому каноническому изоморфизму:

$$Hom_S(A,B)\cong Hom_R(A\otimes_S R,B). \tag{2}$$

С другой стороны, так как всегда имеет место $A\cong A\otimes_R R$, получаем

$$Hom_R(A,B)\cong Hom_R(A\otimes_R R,B). \tag{3}$$

Поскольку группы, стоящие справа от знака изоморфизма в (2) и (3), канонически изоморфны между собой, то

$$Hom_S(A,B)=Hom_R(A,B). \tag{4}$$

Действительно, $Hom_R(A,B)$ – подгруппа группы $Hom_S(A,B)$, однако они канонически изоморфны, следовательно, совпадают.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть для любого модуля B_R верно равенство (4). Отметим, что на S-модуле $A\otimes_S R$ естественным образом определена структура правого R-модуля. Рассмотрим основной ковариантный функтор в категории *mod-R*

$$h^A: B_R\to Hom_R(A,B).$$

В категории *mod-R* также действует ковариантный функтор

$$h^{A\otimes R}: B_R\to Hom_R(A\otimes_S R,B).$$

Его можно представить в виде

$$h^{A\otimes R}: B_R\to Hom_S(A,B),$$

поскольку $Hom_R(A \otimes_S R, B) \cong Hom_S(A, Hom_R(R, B)) \cong Hom_S(A, B)$. Покажем, что h^A и $h^{A\otimes R}$ – эквивалентные функторы из категории *mod-R* в категорию абелевых групп. Построим естественную эквивалентность $h : h^A \to h^{A\otimes R}$, $h(B) : h^A(B) \to h^{A\otimes R}(B)$ такую, что для каждого морфизма $f : B_R \to C_R$ в категории *mod-R* диаграмма

$$\begin{tikzcd} h^A(B) \arrow[r, "h(B)"] \arrow[d, "h^A(f)"'] & h^{A\otimes R}(B) \arrow[d, "h^{A\otimes R}(f)"] \\ h^A(C) \arrow[r, "h(C)"'] & h^{A\otimes R}(C) \end{tikzcd}$$

коммутативна. Здесь $h(B)$ и $h(C)$ индуцируются каноническим гомоморфизмом $A \otimes_S R \to A$. Запишем диаграмму подробнее:

$$\begin{tikzcd} Hom_R(A, B) \arrow[r, "h(B)"] \arrow[d, "h^A(f)"'] & Hom_R(A \otimes_S R, B) \arrow[d, "h^{A\otimes R}(f)"'] & \cong Hom_S(A, B) \\ Hom_R(A, C) \arrow[r, "h(C)"'] & Hom_R(A \otimes_S R, C) & \cong Hom_S(A, C). \end{tikzcd}$$

Поскольку $Hom_R(A, B) = Hom_S(A, B)$ и $Hom_R(A, C) = Hom_S(A, C)$, то $h(B)$ и $h(C)$ – тождественные отображения. Тогда диаграмма коммутативна, так как объекты, расположенные в одной и той же строке, отождествляются. Если h^A и $h^{A\otimes R}$ – эквивалентные функторы то A и $A \otimes_S R$ – эквивалентные объекты в категории *mod-R* (предложение 1.7). Следовательно, имеет место канонический изоморфизм $A \cong A \otimes_S R$. $\square$

Замечание. Теорема 4.6 содержит ряд фактов из [Bow1],[Pie1],[Sc1]. Например, если все модули над кольцом R являются E-модулями, то R есть T-кольцо. Действительно, если для любого R-модуля M справедливо равенство

$$Hom_Z(R, M) = Hom_R(R, M),$$

то это означает, что всякий аддитивный гомоморфизм из модуля R_R в любой модуль M_R является R-модульным, из чего следует, что R_R есть T-модуль над кольцом R, то есть T-кольцо.

Также, например, получается известный факт из статьи [Bow1] о том, что каждое T-кольцо является E-кольцом. Действительно, если R есть T-кольцо, то все гомоморфизмы из R_R в любой другой R-модуль, и в частности, в сам R_R, являются R-модульными. То есть, имеем $Hom_Z(R, R) = Hom_R(R, R)$. А это и есть определение E-кольца.

Заметим, что в обратную сторону аналогичный факт не будет верным, так как если R_R – E-кольцо, то все гомоморфизмы из любого R-модуля в R_R являются модульными, следовательно, $Hom_Z(R, R) = Hom_R(R, R)$. Но это не означает, что всякий гомоморфизм из R_R в любой модуль M_R является модульным.

Следствие 4.7. *Пусть $e : S \to R$ – гомоморфизм колец, A_R – модуль. Если A_S является образующим в mod-S и $T(e)$-модулем, то A_R – образующий в mod-R.*

Доказательство. Пусть A_R – модуль, $\mu : M_R \to N_R$ – R-модульный гомоморфизм, $\mu \neq 0$. Покажем, что существует такой R-модульный гомоморфизм $\varphi : A_R \to M_R$, что $\mu\varphi \neq 0$. По условию теоремы A_S – образующий в категории mod-S. Следовательно, для модулей M_S и N_S и S-модульного гомоморфизма $\mu : M_S \to N_S$ существует S-модульный гомоморфизм $\varphi : A_S \to M_S$ такой, что $\mu\varphi \neq 0$. Далее, поскольку A_R есть $T(e)$-модуль, то по теореме 4.6 все S-модульные гомоморфизмы из A в M являются R-модульными. Значит, φ – R-модульный гомоморфизм.

□

Аналогичный факт верен и для E-модулей.

Следствие 4.8. *Пусть $e : S \to R$ – гомоморфизм колец, A_R – модуль. Если A_S является кообразующим в mod-S и $E(e)$-модулем, то A_R – кообразующий в mod-R.*

Доказательство. Пусть A_R – модуль, $\mu : M_R \to N_R$ – R-модульный гомоморфизм, $\mu \neq 0$. Проводя такие же рассуждения, как в доказательстве следствия 4.7, покажем, что существует такой R-модульный гомоморфизм $\varphi : N_R \to A_R$, что $\varphi\mu \neq 0$. По условию теоремы A_S – кообразующий в категории mod-S, поэтому для модулей M_S и N_S и S-модульного гомоморфизма $\mu : M_S \to N_S$ существует S-модульный гомоморфизм $\varphi : N_S \to A_S$ такой, что $\varphi\mu \neq 0$. Далее, поскольку A_R есть $E(e)$-модуль, то по теореме 4.6 все S-модульные гомоморфизмы из N в A являются R-модульными. Значит, φ – R-модульный гомоморфизм. □

Другие следствия доказанного критерия будут рассмотрены в § 7.

§ 5. СВОЙСТВА ЗАМКНУТОСТИ КЛАССОВ T-МОДУЛЕЙ

Рассмотрим некоторые алгебраические конструкции, сохраняющие свойство быть T-модулем.

Предложение 5.1. *Прямая сумма модулей является $T(e)$-модулем тогда и только тогда, когда каждое прямое слагаемое является $T(e)$-модулем.*

Доказательство. Необходимость. Пусть A_R – модуль и $A = B \oplus C$. Тогда

$$0 = A \otimes_S R/e(S) = (B \oplus C) \otimes_S R/e(S) \cong (B \otimes_S R/e(S)) \oplus (C \otimes_S R/e(S)).$$

Следовательно, $B \otimes_S R/e(S) = 0$ и $C \otimes_S R/e(S) = 0$, то есть каждое прямое слагаемое модуля A по теореме 3.1 является $T(e)$-модулем.

Достаточность. Пусть $A = \oplus_{i \in I} A_i$, где каждый модуль A_i является T-модулем, то есть $A_i \otimes_S R \cong A_i \otimes_R R$ для любого $i \in I$. Имеет место следующая последовательность канонических изоморфизмов:

$$A \otimes_S R = (\oplus_{i \in I} A_i) \otimes_S R \cong \oplus_{i \in I}(A_i \otimes_S R) \cong$$
$$\cong \oplus_{i \in I}(A_i \otimes_R R) \cong (\oplus_{i \in I} A_i) \otimes_R R \cong A \otimes_R R. \qquad \square$$

В отличие от прямой суммы, прямое произведение T-модулей не обязательно является T-модулем.

Пример 5.2. Рассмотрим следующее прямое произведение p-групп. Пусть $A_i = Z(p^\infty)$ и $A = \Pi_{i=1}^{\infty} A_i$. Каждая группа A_i как модуль над кольцом Q_p^* является T-модулем. Однако прямое произведение содержит элементы бесконечного порядка. Например, элемент $a = (a_1, a_2, ...a_n, ...)$, где $o(a_k) = p^k$ в каждой из групп $Z(p^\infty)$. При этом $o(a) = \infty$; а поскольку группа J_p/Z тоже содержит элементы бесконечного порядка, то существует элемент $0 \neq a \otimes \overline{r} \in A \otimes_Z R/ < 1 >$, и $A \otimes_Z R/ < 1 > \neq 0$.

Случай, когда прямое произведение T-модулей является T-модулем, для групп без кручения изучается в § 10.

Предложение 5.3. *Всякий эпиморфный образ $T(e)$-модуля является $T(e)$-модулем.*

Доказательство. Пусть существует эпиморфизм $\varphi : A \to B$. Обозначим $R_0 = R/e(S)$. Точная последовательность $A \to B \to 0$ индуцирует точную последовательность

$$A \otimes R_0 \to B \otimes R_0 \to 0.$$

Поскольку A есть $T(e)$-модуль, то $A \otimes R_0 = 0$ по теореме 3.1. Но тогда и $B \otimes R_0 = 0$, и из той же теоремы следует, что B является T-модулем. □

Замечание. В частности, всякий фактормодуль T-модуля является T-модулем.

Предложение 5.4. *Пусть A – $T(R)$-модуль. Подмодуль B_R является $T(R)$-модулем, если $Tor(A/B, R_0) = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим модуль A_R, и пусть B_R – подмодуль в A_R. Точная последовательность

$$0 \to B \xrightarrow{\alpha} A \to B/A \to 0$$

индуцирует точную последовательность

$$0 \to Tor(B, R_0) \to Tor(A, R_0) \to Tor(A/B, R_0) \to$$

$$\to B \otimes R_0 \xrightarrow{\alpha \otimes 1} A \otimes R_0 \to A/B \otimes R_0 \to 0,$$

где $R_0 = R/ < 1 >$. Пусть A – $T(R)$-модуль, тогда $A \otimes R_0 = 0$. Если $Tor(A/B, R_0) = 0$, то $\alpha \otimes 1$ – мономорфизм. Следовательно, $B \otimes R_0 = 0$ и по теореме 3.1 B – T-модуль. □

Учитывая данное утверждение, в ряде случаев, когда одна из компонент в периодическом произведении – группа без кручения, можно получить некоторые достаточные условия T-модульности.

Следствие 5.5. *Если R_0 – группа без кручения, то для всякого T-модуля A все его подмодули также являются T-модулями.*

Действительно, если R_0 – группа без кручения, то периодическое произведение $Tor(A/B, R_0)$ не может быть отлично от нуля. □

Перейдем к рассмотрению ситуации, когда $B = T(A)$ – периодическая часть группы A, то есть совокупность всех элементов группы A конечного порядка. Подгруппа $T(A)$ всегда является подмодулем в A. Действительно, если $na = 0$ для некоторого $n \in N$, то $n(ar) = (na)r = 0$ для всякого $r \in R$. Группа называется смешанной, если она содержит ненулевые элементы как конечного, так и бесконечного порядка.

Следствие 5.6. *Пусть R – кольцо, A – смешанная группа, $A \in$ mod-R. Если A – $T(R)$-модуль, то периодическая часть группы A также есть $T(R)$-модуль.*

Доказательство. Точная последовательность

$$0 \to T(A) \xrightarrow{\alpha} A \to A/T(A) \to 0$$

индуцирует точную последовательность

$$Tor(A/T(A), R_0) \to T(A) \otimes R_0 \xrightarrow{\alpha \otimes 1} A \otimes R_0 \to A/T(A) \otimes R_0 \to 0,$$

где $A/T(A)$ – группа без кручения. Поэтому для всякого кольца R и группы R_0 справедливо $Tor(A/T(A), R_0) = 0$. Значит, точна следующая последовательность:

$$0 \to T(A) \otimes R_0 \xrightarrow{\alpha \otimes 1} A \otimes R_0 \to A/T(A) \otimes R_0 \to 0.$$

Если A является $T(R)$-модулем, то $A \otimes R_0 = 0$ по теореме 3.1. Так как $\alpha \otimes 1$ – мономорфизм, то $T(A) \otimes R_0 = 0$. Из той же теоремы получаем, что $T(A)$ – T-модуль над R. $\square$

Предложение 5.7. *Пусть A_R , ${}_RB$ – R-модули, $e : S \to R$ – кольцевой гомоморфизм. Для существования канонического изоморфизма*

$$(A_S) \otimes_S ({}_SB) \cong A \otimes_R B$$

достаточно, чтобы хотя бы один из этих модулей был $T(e)$-модулем.

Доказательство. Если A_R – правый $T(e)$-модуль, то $A \otimes_S R \cong A \otimes_R R \cong A$. Рассмотрим последовательность канонических изоморфизмов:

$$A \otimes_S B \cong A \otimes_S (R \otimes_R B) \cong (A \otimes_S R) \otimes_R B \cong A \otimes_R B.$$

Если ${}_RB$ – левый $T(e)$-модуль, то строится цепочка канонических изоморфизмов:

$$A \otimes_S B \cong (A \otimes_R R) \otimes_S B \cong A \otimes_R (R \otimes_S B) \cong A \otimes_R B. \qquad \square$$

Пусть R – кольцо, A_R и ${}_RC$ – модули. Тогда на группе $A \otimes_Z C$ ($= C \otimes_Z A$) существует модульная структура над R. Например, структуру R-модуля можно задать таким образом: $r(a \otimes_Z c) = a \otimes_Z rc$. С другой стороны, R-модульную структуру можно определить и так: $(a \otimes_Z c)r = ar \otimes_Z c$.

Предложение 5.8. *Пусть R – коммутативное кольцо, A_R , ${}_RC$ – модули, причем A_R или ${}_RC$ – $T(R)$-модуль. Тогда $A \otimes_Z C$ – $T(R)$-модуль.*

Доказательство. Поскольку кольцо R коммутативно, можем считать A и C R-R-бимодулями. Отметим, что если один из модулей A

или C является T-модулем, то $A \otimes_Z C$ и $A \otimes_R C$ канонически изоморфны (это следует из предложения 5.7 при $S = Z$). Пусть C является T-модулем. Рассмотрим последовательность канонических изоморфизмов

$$(A \otimes_Z C) \otimes_Z R \cong A \otimes_Z (C \otimes_Z R) \cong A \otimes_Z (C \otimes_R R) \cong (A \otimes_Z C) \otimes_R R.$$

Отсюда видно, что $A \otimes_Z C$ является $T(R)$-модулем. $\square$

Следствие 5.9. *Пусть $e : S \to R$ – гомоморфизм колец, ${}_S(R/e(S))$ – плоский модуль. Тогда всякий подмодуль $T(e)$-модуля является $T(e)$-модулем.*

Доказательство. Рассмотрим некоторый подмодуль B_R модуля A_R. Так как ${}_S(R/e(S))$ – плоский модуль, то для точной последовательности

$$0 \to B \to A \to A/B \to 0$$

индуцированная последовательность

$$0 \to B \otimes_S R/e(S) \to A \otimes_S R/e(S) \to A/B \otimes_S R/e(S) \to 0$$

является точной. По условию теоремы $A \otimes_S R/e(S) = 0$, следовательно, также $B \otimes_S R/e(S) = 0$. По теореме 3.1 B является T-модулем относительно гомоморфизма $e : S \to R$. $\square$

Следствие 5.10. *Пусть R – кольцо, A_R – модуль, B_R – подмодуль в A, причем A – $T(R)$-модуль. Если B – сервантная подгруппа группы A, то B является $T(R)$-модулем.*

Доказательство. Известно, что если B – сервантная подгруппа группы A, то для всякой группы G индуцированная последовательность

$$0 \to B \otimes G \xrightarrow{\alpha \otimes 1} A \otimes G \to A/B \otimes G \to 0$$

точна. В частности, полагая $G = R_0$ и учитывая, что $A \otimes R_0 = 0$, получаем, что также $B \otimes R_0 = 0$, откуда по теореме 3.1 следует, что B – T-модуль. $\square$

Предложение 5.11. *Предел прямого спектра T-модулей является T-модулем.*

Доказательство. Пусть $\{A_i | i \in I\}$ – прямой спектр T-модулей и A – его предел. По теореме 3.1 получаем $A \otimes_S R_0 \cong \varinjlim(A_i \otimes_S R_0) = 0$ и A – T-модуль. $\square$

§ 6. ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ T-МОДУЛЬНОСТЬЮ A_R И СВОЙСТВАМИ КОЛЬЦА R И МОДУЛЯ R_S

В этом параграфе рассматривается следующая задача. Пусть A – T-модуль. Исследовать свойства кольца R и фактор-кольца $R/Ann_R A$, а также свойства R как S-модуля.

Теорема 6.1. *Пусть R – кольцо, A_R – точный модуль, являющийся T-модулем относительно гомоморфизма $e : S \to R$. Тогда R есть левое E-кольцо относительно e.*

Доказательство. По условиям теоремы, гомоморфизм $h : A \otimes_S R \to A \otimes_R R$ является изоморфизмом. Тогда существует канонический изоморфизм

$$Hom_Z(A \otimes_S R, A) \cong Hom_Z(A \otimes_R R, A).$$

Учитывая сопряженность функторов $\otimes$ и Hom, построим последовательность канонических изоморфизмов

$$Hom_S(R, Hom_Z(A, A)) \cong Hom_Z(A \otimes_S R, A) \cong$$

$$\cong Hom_Z(A \otimes_R R, A) \cong Hom_R(R, Hom_Z(A, A)).$$

Это означает, что между $Hom_S(R, E(A))$ и $Hom_R(R, E(A))$ есть канонический изоморфизм. Однако поскольку $Hom_R(R, E(A)) \subseteq Hom_S(R, E(A))$, то можно записать равенство

$$Hom_R(R, E(A)) = Hom_S(R, E(A)).$$

Получили, что каждый S-модульный гомоморфизм $\phi : R \to E(A)$ является R-модульным.

Для элемента $x \in R$ через α_x обозначим аддитивный гомоморфизм $A \to A$, $\alpha_x(a) = ax$, $a \in A$. Теперь определим аддитивный гомоморфизм $\rho : R \to Hom_Z(A, A)$ посредством формулы $\rho(x) = \alpha_x$, $x \in R$.

Возьмем элементы $s \in S$, $r \in R$, $a \in A$. Вычислим $\rho(sx)(a) = \alpha_{sx}(a) = a(sx) = a(e(s)x) = (ae(s))x = (as)x$. С другой стороны, $s\rho(x)(a) = (s\alpha_x)(a) = \alpha_x(as) = (as)x$. Итак, $\rho(sx) = s\rho(x)$ и ρ – гомоморфизм левых S-модулей.

Отсюда видно, что кольцевой гомоморфизм $\rho : R \to E(A)$, определяющий на группе A структуру R-модуля, является S-модульным гомоморфизмом, следовательно, он также является R-модульным, то есть $\rho(sr) = s\rho(r)$ для любых $r, s \in R$. Образ $\rho(R) \subseteq E(A)$ – это кольцо R_L правых умножений элементов модуля A на элементы кольца R. Так как A – точный модуль, то ρ – мономорфизм, так как в противном случае существует такой элемент $r \in R$, что $ar = 0$ для всех $a \in A$. Следовательно, $\rho : R \to R_L$ – изоморфизм.

Предположим теперь, что R не является левым E-кольцом. Следовательно, $Hom_R({}_RR, {}_RR)$ и $Hom_S({}_SR, {}_SR)$ не изоморфны, то есть существует некоторый S-модульный гомоморфизм $\phi_1 : R \to R$, который не является R-модульным. Как замечено выше, ρ – изоморфизм R-модулей. Положим $\phi = \rho \circ \phi_1$. По построению, $\phi \in Hom_S(R, E(A))$, но он не является R-модульным. Однако, $Hom_R(R, E(A)) = Hom_S(R, E(A))$. Пришли к противоречию. □

Следствие 6.2. *Если абелева группа A является T-модулем над кольцом эндоморфизмов $E(A)$ [соответственно, $Z(E(A))$], то $E(A)$ [соответственно, $Z(E(A))$] есть E-кольцо.*

Доказательство. Нужно показать, что A является точным как модуль над $E(A)$ и $Z(E(A))$. Пусть существует некоторый элемент $\varphi \in Ann_{E(A)}A$, $\varphi \neq 0$. Тогда $\varphi(a) = 0$ для всех элементов $a \in A$. Следовательно, $\varphi = 0$. □

Замечание. Аналогичное утверждение верно и для группы A как модуля над кольцами $End_R A$, $Biend A_R$.

Существование канонического изоморфизма $A \otimes_Z R \cong A \otimes_R R$ связано с количеством модульных структур на абелевой группе A над кольцом R. Известно [Pie1], что для абсолютного $E(R)$-модуля A_R на аддитивной группе A существует единственная R-модульная структура. Аналогичный результат оказывается верным и для T-модулей относительно гомоморфизма $e : S \to R$.

Следствие 6.3. *Пусть $e : S \to R$ – гомоморфизм колец, A – S-модуль. Пусть на A можно задать структуру R-модуля так, что он становится притягивающим S-модулем и $T(e)$-модулем относительно гомоморфизма e. Тогда структура R-модуля на A такая, что A – притягивающий S-модуль, единственна.*

Доказательство. Пусть A является $T(R)$-модулем и на A существуют две различные структуры модуля над кольцом R – одна с внешним умножением $a \cdot r$, другая с внешним умножением $a \circ r$. При этом A – притягивающий S-модуль относительно e, т.е. $as = a \circ e(s)$, где $a \in A, s \in S$. Поскольку также $as = ae(s)$, то $ae(s) = a \circ e(s)$ для всех $a \in A, s \in S$. Требуется показать, что $ar = a \circ r$ для всех $a \in A$ и $r \in R$.

Из доказательства теоремы 4.3 видно, что R-модуль $Hom_Z(A, A)$ является левым $E(R)$-модулем (при $A = B$). Таким образом, все S-модульные гомоморфизмы из R в $Hom_Z(A, A)$ являются R-модульными.

Так же, как в доказательстве теоремы 6.1, для $x \in R$ будем рассматривать аддитивный гомоморфизм $\alpha_x \in Hom_Z(A, A)$, задаваемый следующим образом: $\alpha_x(a) = a \circ x$, $a \in A$. Если определить аддитивный гомоморфизм $\phi : R \to Hom_Z(A, A)$ формулой $\phi(x) = \alpha_x$, $x \in R$, то аналогично доказательству теоремы 6.1 можно показать, что ϕ – гомоморфизм левых S-модулей. Но так как $Hom_Z(A, A)$ - $E(R)$-модуль, то ϕ – R-модульный гомоморфизм, т.е. $\phi(rx) = r\phi(x)$ для всех $r, x \in R$. Следовательно, для любого $a \in A$ имеем $\alpha_{rx}(a) = r\alpha_x(a)$. Здесь $\alpha_{rx}(a) = a \circ (rx)$, а $r\alpha_x(a) = \alpha_x(ar) = ar \circ x$. При $x = 1$ получаем $a \circ r = ar$, что означает совпадение двух R-модульных структур на A. $\square$

Замечание. Если A – абсолютный $T(R)$-модуль, то на A есть лишь одна R-модульная структура.

Предложение 6.4. *Пусть R – кольцо, A – R-модуль.*
Если выполнены следующие условия:
1) A является абсолютным $T(R/Ann_R A)$-модулем,
2) $A \otimes Ann_R A = 0$,
то модуль A является абсолютным $T(R)$-модулем.
Обратно, если A является абсолютным $T(R)$-модулем, то выполнено условие 1). Если дополнительно A – группа без кручения, то выполнено также условие 2).

Доказательство. Пусть $A \otimes Ann_R A = 0$ и $A \otimes (R/Ann_R A) \cong A$. В данном случае индуцированная точная последовательность

$$A \otimes Ann_R A \xrightarrow{1\otimes\alpha} A \otimes R \xrightarrow{1\otimes\beta} A \otimes R/Ann_R A \to 0$$

выглядит следующим образом:

$$0 \to A \otimes R \xrightarrow{1\otimes\beta} A \to 0.$$

Отсюда следует, что $A \otimes R \cong A$ и A – $T(R)$-модуль.

Обратно, точная последовательность

$$0 \to Ann_R A \xrightarrow{\alpha} R \xrightarrow{\beta} R/Ann_R A \to 0$$

индуцирует точную последовательность

$$Tor(A, R/Ann_R A) \xrightarrow{E_*} A \otimes Ann_R A \xrightarrow{1\otimes\alpha} A \otimes R \xrightarrow{1\otimes\beta} A \otimes R/Ann_R A \to 0.$$

Здесь $R/Ann_R A$ – кольцо с единицей $\overline{1}$, отображение $1\otimes\beta$ – эпиморфизм. Так как A – $T(R)$-модуль, то имеем канонический изоморфизм $i : A \otimes R \to A$. Следовательно, композиция $(1 \otimes \beta)i^{-1} : A \to A \otimes R/Ann_R A$, $a \to a \otimes \overline{1}$ – эпиморфизм. Покажем, что это мономорфизм. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
A \otimes Ann_R A & \xrightarrow{1\otimes\alpha} & A \otimes R & \xrightarrow{1\otimes\beta} & A \otimes R/Ann_R A & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle (1)} & & \downarrow{\scriptstyle (2)} & & \downarrow{\scriptstyle (3)} & & \\
A \otimes_R Ann_R A & \xrightarrow{0} & A \otimes_R R & \xrightarrow{t} & A \otimes_R R/Ann_R A & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Здесь $A \otimes_R Ann_R A = 0$ и t – изоморфизм, $t(a \otimes_R r) = a \otimes_R \overline{r}$. Отображение (2) также изоморфизм, так как A есть $T(R)$-модуль, а (3) – эпиморфизм, при котором $a\otimes\overline{r}$ переходит в $a\otimes_R\overline{r}$. Если для некоторого $0 \neq a \in A$ будет $a \otimes \overline{1} = 0$, то $0 = a \otimes_R \overline{1} = t(a \otimes_R 1)$, откуда следовало бы $a = 0$. Итак, $1 \otimes \beta$ – мономорфизм, следовательно, изоморфизм. Получили канонический изоморфизм $A \otimes (R/Ann_R A) \cong A$, то есть A является $T(R/Ann_R A)$-модулем.

Пусть теперь A – группа без кручения. Обозначим $\overline{R} = R/Ann_R A$. Отображение $A \to A \otimes \overline{R}$, $a \to a \otimes \overline{1}$ является изоморфизмом. Отсюда следует, что $Im(1 \otimes \alpha) = 0$, $Ker(1 \otimes \alpha) = Im\, E_* = A \otimes Ann_R A$, то есть E_* – эпиморфизм. Тогда, если A – группа без кручения, то $Tor(A, R/Ann_R A) = 0$ и $Im\, E_* = A \otimes Ann_R A = 0$. □

В частности, из теоремы 6.1 и предложения 6.4 можно получить

Следствие 6.5. *Пусть A_R – абсолютный T-модуль над кольцом R. Тогда $R/Ann_R A$ есть абсолютное E-кольцо.* □

Это позволяет сконцентрировать внимание на изучении модулей над E-кольцами.

Рассмотрим фиксированную абелеву группу как модуль над различными кольцами.

Предложение 6.6. *Пусть $e : S \to R$ – гомоморфизм колец, A_R – точный модуль, A – группа без кручения. Если A_R – абсолютный T-модуль над R, то A_S – абсолютный T-модуль над S.*

Доказательство. Можно считать, что S – подкольцо кольца R. Модуль A является T-модулем над R, то есть выполняется условие $A \otimes_Z R \cong A \otimes_R R$. Поскольку A – группа без кручения, то последовательность $0 \to S \to R$ индуцирует точную последовательность

$$0 \to A \otimes_Z S \to A \otimes_Z R.$$

Но имеет место естественный изоморфизм между группами $A \otimes_Z R$ и A, поэтому можно записать такую точную последовательность:

$$0 \to A \otimes_Z S \xrightarrow{h} A.$$

Отсюда видно, что гомоморфизм h является мономорфизмом. Но в то же время $h : A \otimes_Z S \to A \otimes_S S \cong A$ – канонический гомоморфизм. Он является сюръективным, так как для каждого элемента $a \in A$ существует $a \otimes 1_S \in A \otimes_Z S$ со свойством $h(a \otimes 1_S) = a$. Следовательно, гомоморфизм h – биекция, из чего следует, что A_S является T-модулем. $\square$

Следствие 6.7. *Пусть A – группа без кручения, являющаяся T-модулем над $E(A)$. Тогда A является T-модулем над всяким кольцом R, над которым на группе A существует структура R-модуля, такая, что A_R – точный модуль.*

Доказательство. Каждая модульная структура определяется некоторым гомоморфизмом колец $\rho : R \to E(A)$. Поскольку A_R является точным модулем, то ρ – мономорфизм. Тогда A_R – T-модуль по предложению 6.6. $\square$

Свойство быть T-модулем над кольцом эндоморфизмов не сохраняется для прямых сумм.

Пример 6.8. Рассмотрим прямую сумму групп $A = \oplus_{i=1}^{n} A_i$, где каждая группа A_i может быть превращена в T-модуль над своим кольцом эндоморфизмов, например, A – группа без кручения ранга 1. Тогда кольцо эндоморфизмов группы A изоморфно кольцу матриц следующего вида:

$$\mathbf{E(A)} = \begin{pmatrix} E(A_1) & Hom(A_2, A_1) & \dots & Hom(A_n, A_1) \\ Hom(A_1, A_2) & E(A_2) & \dots & Hom(A_n, A_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Hom(A_1, A_n) & Hom(A_2, A_n) & \dots & E(A_n) \end{pmatrix}$$

Это кольцо не обязательно является коммутативным, следовательно, не является E-кольцом. Значит, по теореме 6.1 группа A может не быть T-модулем над $E(A)$. Если же все типы групп A_i попарно несравнимы, так что $Hom(A_i, A_j) = 0$ для $i \neq j$, то при $n > 1$ A также не является T-модулем над $E(A)$, но по другой причине, связанной с рангом без кручения кольца $E(A)$. (Это будет показано в § 8.)

Отметим еще одно свойство модуля ${}_SR$ в случае, когда A_S – T-модуль.

Предложение 6.9. *Пусть R – кольцо, $e : S \to R$ – гомоморфизм колец, A_R – точный модуль. Тогда если A_S – абсолютный T-модуль, то ${}_SR$ – абсолютный E-модуль.*

Доказательство. С одной стороны,

$$Hom_Z(S, E(A)) = Hom_Z(S, Hom_Z(A, A)) \cong Hom_Z(A \otimes_Z S, A). \qquad (1)$$

С другой стороны, имеют место такие соотношения:

$$Hom_S(S, E(A)) = Hom_S(S, Hom_Z(A, A)) \cong Hom_Z(A \otimes_S S, A). \qquad (2)$$

Поскольку A_S – T-модуль, то есть $A \otimes_Z S = A \otimes_R S$, то все группы в (1) и (2) канонически изоморфны между собой, и имеет место изоморфизм

$$Hom_Z(S, E(A)) \cong Hom_S(S, E(A)). \tag{3}$$

Получили, что левый S-модуль $E(A)$ является E-модулем. Покажем, что в этом случае $Hom_Z(S, R) = Hom_S(S, R)$. Рассмотрим композицию отображений

$$S \xrightarrow{e} R \xrightarrow{\rho} E(A).$$

Образ $(\rho \circ e)(S) = S_L$ – кольцо правых умножений группы A на элементы кольца S. Допустим, существует аддитивный, но не S-модульный гомоморфизм $\varphi : S \to R$. Тогда $\varphi_1 = \rho \circ \varphi$ – не S-модульный гомоморфизм из S в $E(A)$, что противоречит (3). Более того, поскольку $Hom_S(S, R)$ – подгруппа в $Hom_Z(S, R)$, которая канонически изоморфна самой группе, можно записать равенство

$$Hom_Z(S, R) = Hom_S(S, R). \quad \square$$

Таким образом, если S – такое кольцо, что над ним существует хотя бы один точный модуль, являющийся абсолютным T-модулем, то для любого кольца R и гомоморфизма $e : S \to R$ верно, что R является T-модулем над S.

§ 7. T-МОДУЛЬНОСТЬ A_R В СЛУЧАЕ, КОГДА R_S – T-МОДУЛЬ. ФАКТОРКОЛЬЦО R/I КАК $T(R)$-МОДУЛЬ

Обратимся к исследованию взаимосвязи между T- и E-модулями относительно гомоморфизма $e : S \to R$ и абсолютными T- и E-модулями в случае, когда R_S – T-модуль. Будем считать, что $e(S) \subset Z(R)$. При этом мы можем не различать правые и левые S-модули R_S и ${}_SR$. В § 2 было показано, что абсолютный T-модуль является T-модулем относительно любого кольца S и гомоморфизма $e : S \to R$. Найдем некоторые условия, при которых свойства модуля быть T-модулем относительно гомоморфизма e и абсолютным T-модулем эквивалентны.

Предложение 7.1. *Пусть R, S, K – кольца, $h : S \to R$, $e : K \to S$ – гомоморфизмы колец, причем e – центральный гомоморфизм. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) R_S – $T(e)$-модуль;

2) Для любого S-модуля A существует канонический изоморфизм $A \otimes_K R \cong A \otimes_S R$;

3) Для любого S-модуля A верно равенство $Hom_K(R, A) = Hom_S(R, A)$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть R_S – $T(e)$-модуль, то есть $R \otimes_K S \cong R \cong S \otimes_K R$. Так как e – центральный гомоморфизм, то $R \otimes_K S \cong S \otimes_K R$. Далее, рассмотрим некоторый модуль A_S. Запишем последовательность канонических изоморфизмов:

$$A \otimes_K R \overset{(1)}{\cong} (A \otimes_S S) \otimes_K R \overset{(2)}{\cong} A \otimes_S (S \otimes_K R) \overset{(3)}{\cong} A \otimes_S R.$$

Здесь (2) следует из ассоциативности тензорного произведения, (3) – из того, что R_S – T-модуль. Таким образом, $A \otimes_K R \cong A \otimes_S R$.

2) $\Rightarrow$ 1). Так как для всякого S-модуля A справедлив канонический изоморфизм $A \otimes_S R \cong A \otimes_K R$, то полагая $A = S$, имеем $S \otimes_S R \cong S \otimes_K R$, то есть R является $T(e)$-модулем.

1) $\Rightarrow$ 3). Пусть R_S – $T(e)$-модуль. Возьмем S-модуль A и рассмотрим следующую последовательность канонических изоморфизмов:

$$Hom_S(R, A) \cong Hom_S(R \otimes_K S, A) \cong$$
$$\cong Hom_K(R, Hom_S(S, A)) \cong Hom_K(R, A).$$

Таким образом, $Hom_S(R, A) \cong Hom_K(R, A)$. Но $Hom_S(R, A)$ – подгруппа в $Hom_K(R, A)$, и если она канонически изоморфна самой группе, то совпадает с ней, и можно записать равенство

$$Hom_S(R, A) = Hom_K(R, A).$$

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть для любого модуля A_S верно равенство $Hom_K(R, A) = Hom_S(R, A)$. То есть R_S – такой модуль, что каждый K-модульный гомоморфизм из R в A является S-модульным. Тогда по теореме 4.6 R является T-модулем над кольцом S. $\square$

Следствие 7.2. *Пусть R, S – кольца, $h : S \to R$ – гомоморфизм колец, R_S – T-модуль. Тогда:*

1) каждый модуль A_R является абсолютным T-модулем тогда и только тогда, когда он является T-модулем относительно гомоморфизма $h : S \to R$;

2) каждый модуль A_R является абсолютным E-модулем тогда и только тогда, тогда он является E-модулем относительно гомоморфизма $h : S \to R$.

Доказательство. Утверждение 1) следует из условия 2) предложения 7.1 при $K = Z$. Действительно, если R_S – T-модуль, то

$A \otimes_Z R \cong A \otimes_S R$, откуда получаем, что условие $A \otimes_Z R \cong A \otimes_R R$ выполняется тогда и только тогда, когда $A \otimes_S R \cong A \otimes_R R$.
Аналогично доказывается утверждение 2). □

Предложение 7.1 и следствие 7.2 содержат ряд утверждений о строении модулей над T-кольцами [Bow1],[Si1]. Полагая $K = Z$, получаем следующие факты, касающиеся модулей над T-кольцами.
1. Кольцо R является T-кольцом тогда и только тогда, когда каждый модуль над ним является $T(R)$-модулем.
2. Кольцо R является T-кольцом тогда и только тогда, когда каждый модуль над ним является $E(R)$-модулем.

Действительно, полагая $S = R$, имеем тождественный гомоморфизм $h : R \to R$, при этом R_S превращается в правый регулярный модуль R_R; первое условие в этом случае говорит о том, что R – T-кольцо.

Таким образом, эквивалентны следующие утверждения:
1) R – абсолютное T-кольцо;
2) Для всякого модуля A_R : $A \otimes_Z R \cong A \otimes_R R$, то есть любой модуль A_R является абсолютным $T(R)$-модулем;
3) Для всякого модуля A_R : $Hom_Z(R, A) = Hom_R(R, A)$, то есть любой модуль A_R является абсолютным $E(R)$-модулем.

Пусть теперь R – коммутативное кольцо, I – идеал кольца R. Тогда на I и R/I задается структура R-модуля. Исследуем вопрос о том, когда I либо R/I является $T(R)$-модулем и как это связано со свойствами I как подгруппы в R^+.

Предложение 7.3. *Пусть R – коммутативное кольцо, I – идеал кольца R. Если $(R/I)_R$ – абсолютный T-модуль, то R/I – абсолютное E-кольцо.*

Доказательство. По условию теоремы имеем канонический изоморфизм

$$R/I \otimes_Z R \cong R/I \otimes_R R.$$

Тогда по теореме 4.6 для любого R-модуля C имеем равенство

$$Hom_Z(R/I, C) = Hom_R(R/I, C). \tag{1}$$

В частности, полагая $C_R = (R/I)_R$, имеем

$$Hom_Z(R/I, R/I) = Hom_R(R/I, R/I). \tag{2}$$

Осталось показать, что

$$Hom_R(R/I, R/I) = Hom_{R/I}(R/I, R/I). \tag{3}$$

Возьмем канонический гомоморфизм $h : R \to R/I$. Здесь применимы все рассуждения и факты, доказанные для T-модулей относительно гомоморфизма $e : S \to R$. Так как h – сюръекция, то R/I является E-кольцом относительно h. Из этого немедленно следует, что каждый модуль A над кольцом R/I является $T(h)$-модулем. Следовательно, всякий R-модульный гомоморфизм из A в любой R/I-модуль M является R/I-модульным гомоморфизмом. Положим $A = M = R/I$. Получаем равенства (2) и (3). Следовательно, R/I является E-кольцом. $\square$

Предложение 7.3 содержит одно из утверждений [Bow1] о взаимосвязи между T-кольцами и E-кольцами. Положим $I = 0$. Тогда $R/I = R$, и из того, что R_R является T-модулем следует, что R_R является E-кольцом. Другими словами, всякое T-кольцо является E-кольцом.

Если рассматривать $(R/I)_R$ как $T(R)$-модуль, можно получить утверждение, аналогичное предложению 7.1.

Следствие 7.4. *Пусть R – коммутативное кольцо, I – идеал кольца R. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $(R/I)_R$ – абсолютный T-модуль;

2) для любого R-модуля A существует канонический изоморфизм $A \otimes_Z (R/I) \cong A \otimes_R (R/I)$;

3) для любого R-модуля A верно равенство $Hom_Z(R/I, A) = Hom_R(R/I, A)$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $R/I \otimes_Z R \cong R/I \otimes_R R \cong R/I$. Пусть A_R – модуль. Покажем, что $A \otimes_Z R/I \cong A \otimes_R R/I$. Запишем последовательность канонических изоморфизмов

$$A \otimes_Z R/I \cong (A \otimes_R R) \otimes_Z R/I \cong A \otimes_R (R \otimes_Z R/I) \cong$$

$$\cong A \otimes_R (R \otimes_R R/I) \cong A \otimes_R R/I.$$

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть для любого модуля A_R : $A \otimes_Z R/I \cong A \otimes_R R/I$. Полагая $A_R = R_R$, получаем утверждение 1).

1) $\Rightarrow$ 3). Имеем $R/I \otimes_Z R \cong R/I \otimes_R R$. Тогда для любого R-модуля A по теореме 4.6 выполнено

$$Hom_Z(R/I, A) = Hom_R(R/I, A). \tag{4}$$

3) $\Rightarrow$ 1). Имеем (4) для любого модуля A_R. Тогда по теореме 4.6 $(R/I)_R$ является $T(R)$-модулем. □

Полагая $I = 0$, имеем тождественный автоморфизм $h : R \to R$, при этом $(R/I)_R$ превращается в правый регулярный модуль R_R, и условие 1) в этом случае говорит о том, что R – T-кольцо, а 2) и 3) – что A_R является T-модулем или E-модулем.

ГЛАВА 3

ОПИСАНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ $T(R)$-ГРУПП

Эта глава посвящена описанию $T(R)$-групп. Абелева группа A называется $T(R)$-группой, если на ней можно задать структуру модуля над кольцом R так, что A будет $T(R)$-модулем. Значительное влияние на строение $T(R)$-групп оказывает ранг без кручения аддитивной группы кольца R. Для периодических колец и колец без кручения R получен полный ответ о строении $T(R)$-групп. Оказывается, что для некоторых классов абелевых групп можно построить кольцо R, над которым все данные группы являются $T(R)$-группами.

Как обычно, групповые термины, применяемые к кольцу, относятся к его аддитивной группе. Например, фраза "R – периодическое кольцо" означает, что аддитивная группа R^+ является периодической группой.

Исследуются абелевы группы, которые являются T-модулями над своими кольцами эндоморфизмов и центрами колец эндоморфизмов.

Всюду в этой главе рассматриваются абсолютные T-модули, то есть T-модули относительно кольцевого гомоморфизма $e : Z \to R$. Таким образом, $T(R)$-модуль определяется наличием канонического изоморфизма $A \otimes_Z R \cong A \otimes_R R$.

Обозначим через $\mathcal{T}(R)$ класс всех $T(R)$-групп, через $\mathcal{T}_t(R)$ – класс всех периодических групп, принадлежащих $\mathcal{T}(R)$, через $\mathcal{T}_p(R)$ – класс всех p-групп, принадлежащих $\mathcal{T}(R)$, через $\mathcal{T}_f(R)$ – класс групп без кручения из $\mathcal{T}(R)$.

В этой главе R_0 обозначает $R/ < 1 >$.

§ 8. РАНГ КОЛЬЦА R И КЛАССЫ $T(R)$-МОДУЛЕЙ

Лемма 8.1. *Модуль A со смешанной аддитивной группой есть $T(R)$-модуль тогда и только тогда, когда $T(A)$ и $A/T(A)$ являются $T(R)$-группами.*

Доказательство. Пусть A – смешанная группа. Покажем сначала, что если на A имеется структура R-модуля, то на $T(A)$ и $A/T(A)$ также можно задать структуру R-модуля. Группа $T(A)$ есть вполне характеристическая подгруппа группы A, другими словами, она есть подмодуль модуля ${}_{E(A)}A$. Пусть теперь R – некоторое кольцо, над которым на группе A определена структура модуля. Тогда имеем кольцевой гомоморфизм $\rho : R \to E(A)$ и структура R-модуля на группе $T(A)$ может быть определена как структура притягивающего R-модуля относительно ρ. Отметим, что $T(A)$ – подмодуль модуля A. Тогда $A/T(A)$ есть фактормодуль.

Необходимость. Согласно предложению 5.3 всякий фактормодуль $T(R)$-модуля является $T(R)$-модулем. По следствию 5.6 периодическая часть $T(R)$-модуля является $T(R)$-модулем.
Достаточность. Для точной последовательности

$$0 \to T(A) \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A/T(A) \to 0$$

рассмотрим индуцированную точную последовательность

$$0 \to T(A) \otimes R_0 \xrightarrow{\alpha\otimes 1} A \otimes R_0 \xrightarrow{\beta\otimes 1} A/T(A) \otimes R_0 \to 0.$$

Здесь имеем $T(A) \otimes R_0 = 0$ и $A/T(A) \otimes R_0 = 0$ по теореме 3.1. Поэтому $A \otimes R_0 = 0$ и по теореме 3.1 A является $T(R)$-модулем. □

Замечание. Данное утверждение позволяет рассматривать только модули с аддитивными группами, являющимися периодическими или группами без кручения. Ситуация, когда группа является смешанной, в целом сводится к этим двум случаям.

Отметим, что условие $A \otimes R_0 = 0$ еще не означает, что группа A является $T(R)$-группой. Возможно, что оно выполнено, однако на A может не существовать структура R-модуля. Рассмотрим вопрос о том, когда можно задать структуру T-модуля на группе A над произвольным кольцом R. Для этого потребуется ввести дополнительное условие.

Предложение 8.2. *На группе A существует структура $T(R)$-модуля тогда и только тогда, когда*
1) $A \otimes R_0 = 0$;
2) отображение $\omega : A \to A \otimes R,\ \ a \to a \otimes 1$ является мономорфизмом.

Доказательство. Необходимость. Пусть A является $T(R)$-модулем. Тогда 1) выполнено по теореме 3.1, 2) следует из того, что по определению $T(R)$-модуля $\omega : A \to A \otimes R,\ \ a \to a \otimes 1$ – изоморфизм.

Достаточность. Пусть A – группа и выполнены условия 1) и 2). Определим R-модульную структуру на A следующим образом: $a \cdot r = \omega^{-1}(a \otimes r)$. Из условия 1) и теоремы 3.1 следует, что A_R – $T(R)$-модуль. □

С помощью теоремы 3.1 и следствия 3.2 можно существенно ограничить классы колец и модулей, для которых может существовать канонический изоморфизм $A \otimes_Z R \cong A \otimes_R R$. Известно, что для любой группы A и ее подгруппы B, $r_0(A) = r_0(B) + r_0(A/B)$. Если R не является периодическим кольцом, то $< 1 > \cong Z$, и применяя данное равенство к группе R^+ и ее подгруппе $< 1 >$, получаем $r_0(R) = r_0(< 1 >) + r_0(R/ < 1 >)$. Здесь $r_0(< 1 >) = 1$, поэтому $r_0(R) = r_0(R_0) + 1$. Сформулируем такое утверждение.

Теорема 8.3. *$\mathcal{T}(R) = \mathcal{T}_t(R)$ тогда и только тогда, когда $r_0(R) \neq 1$.*

Доказательство. Необходимость. Допустим, что $\mathcal{T}(R) = \mathcal{T}_t(R)$, но $r_0(R) = 1$. Тогда $R/T(R)$ – кольцо ранга 1, то есть T-кольцо. Покажем, что существует группа без кручения, которая является $T(R)$-группой. Пусть A – делимая группа без кручения. Тогда группа A естественным образом превращается в правый R-модуль, умножение на элементы $r \in T(R)$ – нулевое умножение; полагаем $ar = a\overline{r}$ для элементов r, не принадлежащих периодической части кольца R, где $\overline{r} = r + T(R)$. Структура модуля над кольцом без кручения $R/T(R)$ ранга 1 определяется как структура притягивающего модуля относительно кольцевого гомоморфизма $h : R/T(R) \to Q$. Поскольку R_0 – периодическая группа, то $A \otimes R_0 = 0$ и A – $T(R)$-модуль согласно теореме 3.1. Итак, существует группа без кручения, являющаяся T-модулем над кольцом ранга без кручения 1. Следовательно, предположение, что $r_0(R) = 1$, неверно.

Достаточность. Пусть $r_0(R) \neq 1$. Если $r_0(R) = 0$, то R – ограниченное кольцо. Тогда только на ограниченных группах может существовать структура R-модуля, и $\mathcal{T}(R) = \mathcal{T}_t(R)$.

Если $r_0(R) > 1$, то $r_0(R_0) > 0$. При этом для любой группы A, содержащей элементы бесконечного порядка, тензорное произведение $A \otimes R_0$ содержит ненулевой элемент $a \otimes \overline{r}$, где $o(a) = \infty$ в A и $o(\overline{r}) = \infty$ в R_0. Таким образом, равенство $A \otimes R_0 = 0$ оказывается невыполнимо, если только A не является периодической группой. Итак, при $r_0(R) > 1$ должно выполняться $\mathcal{T}(R) = \mathcal{T}_t(R)$, то есть $\mathcal{T}_f(R) = \{0\}$. $\square$

Получим сначала описание периодических колец, над которыми существуют T-модули, и описание T-модулей над периодическими кольцами. Пусть R – периодическое кольцо с единицей. Тогда R^+ – ограниченная группа. Действительно, так как $1 \in R$, то для некоторого $n \in N$ выполняется $n \cdot 1_R = 0$. Тогда для всякого элемента $r \in R$ можно записать $n \cdot r = n \cdot (1_R \cdot r) = (n \cdot 1_R) \cdot r = 0$. Аддитивными группами R-модулей также могут служить только ограниченные группы с условием $nA = 0$ (при том же самом $n \in N$), так как $na = a \cdot (n \cdot 1_R) = 0$. Если m – минимальное натуральное число со свойством $m \cdot 1_R = 0$, то $< 1 > \cong Z(m)$. Здесь $CharR > 0$. По теореме Прюфера-Бэра [Ф3], аддитивные группы A и R^+ – прямые суммы циклических p-групп. Далее, $A \otimes_Z R$ – тензорное произведение ограниченных групп, оно также является прямой суммой циклических p-групп. Выясним, при каких условиях может существовать канонический изоморфизм $A \otimes_Z R \cong A$. Так как R – ограниченное кольцо, то $R \cong R_{p_1} \times ... \times R_{p_k}$, где каждая p_i-компонента R_{p_i} является ограниченным p_i-кольцом.

Предложение 8.4. *Пусть R – периодическое кольцо. Класс $\mathcal{T}(R) \neq \{0\}$ тогда и только тогда, когда в разложении кольца R в произведение р-компонент хотя бы одно р-кольцо R_p является кольцом вычетов. Класс $\mathcal{T}(R)$ состоит из всех ограниченных групп A таких, что $A_p \neq 0$, если только $R_p \cong Z_{p^k}$.*

Доказательство. Докажем это утверждение сначала для p-колец. Для доказательства достаточности заметим, что если $R \cong Z_{p^k}$, то R – T-кольцо и всякий модуль над ним является T-модулем (при этом аддитивные группы модулей над R – это прямые суммы циклических p-групп).

Необходимость. Предположим, что R_p не изоморфно кольцу вычетов. Тогда по теореме Прюфера-Бэра $R^+ \cong \oplus_k Z(p^k)$. Рассмотрим тензорное произведение $A \otimes_Z R$:

$$A \otimes_Z R \cong (\oplus_{m\in M} Z(p^m)) \otimes (\oplus_{k\in K} Z(p^k)) \cong \oplus_{m\in M}(Z(p^m) \otimes (\oplus_{k\in K} Z(p^k))).$$

(Отметим, что для степеней m и k всегда верно неравенство $k \geq m$, иначе на A не существует структура R-модуля). Полученное выражение может быть изоморфно A в том и только в том случае, когда $\oplus_{k\in K} Z(p^k)$ состоит лишь из одного слагаемого $Z(p^k)$. В противном случае, $A \otimes R \cong A \otimes (\oplus_{k\in K} Z(p^k)) \cong \oplus_{k\in K}(A \otimes Z(p^k)) \cong \oplus_{k\in K} A \neq A$. Итак, $R \cong Z(p^k)$.

Случай периодических колец сводится к случаю p-колец, так как $A \otimes R \cong (\oplus_{p\in P} A_p) \otimes (\oplus_{p\in P} R_p) \cong \oplus_{p\in P}(A_p \otimes R_p)$. □

Предложение 8.5. Пусть R – делимое кольцо без кручения ранга больше 1. Тогда $\mathcal{T}(R) = \{0\}$.

Доказательство. Пусть $r(R) = r_0(R) > 1$, $R^+ \cong \oplus Q$. Тогда по теореме 8.3 $\mathcal{T}(R) = \mathcal{T}_t(R)$. Однако для любой периодической группы A верно равенство $A \otimes R = 0$, так как R^+ – делимая группа. То есть, никакая периодическая группа не может быть R-модулем. Тогда $\mathcal{T}_t(R) = \{0\}$. □

§ 9. СТРОЕНИЕ T-МОДУЛЯ НАД КОЛЬЦАМИ R, $E(A)$ и $Z(E(A))$ НА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУППАХ

Рассмотрим сначала вопрос, когда p-группа является $T(R)$-группой. Обозначим через B_p p-базисную подгруппу группы R^+.

Теорема 9.1. *Пусть R – кольцо. Тогда*
1) Класс $\mathcal{T}_p(R)$ непуст тогда и только тогда, когда $r_p(R) = 1$.
2) Если $B_p \cong Z$, то $\mathcal{T}_p(R)$ содержит все p-группы, а в случае, когда $B_p \cong Z(p^k)$, класс $\mathcal{T}_p(R)$ состоит из всех p-групп A с условием $p^k A = 0$.

Доказательство. 1) Необходимость. Пусть класс $\mathcal{T}_p(R)$ непуст. Если при этом $r_p(R) \neq 1$, то p-базисная подгруппа B_p группы R^+ равна прямой сумме двух ненулевых слагаемых B_1 и B_2. Тогда для p-группы A имеем $A \otimes R \cong A \otimes B_p \cong A \otimes (B_1 \oplus B_2) \cong (A \otimes B_1) \oplus (A \otimes B_2)$. Поэтому группа $A \otimes R$ не может быть канонически изоморфна A. Следовательно, $r_p(R) = 1$.

Достаточность. Пусть $r_p(R) = 1$. Тогда p-базисная подгруппа группы R^+ изоморфна либо Z, либо $Z(p^k)$. В первом случае для всякой p-группы имеем $A \otimes R \cong A \otimes B_p \cong A$. Структура модуля на p-группе определена, так как структура модуля над Z существует естественным образом, а на любой элемент r она распространяется за счет того, что p-ранг кольца R равен 1. Во втором случае структура модуля может быть только на ограниченной p-группе такой, что $p^k A = 0$.

2) Если $B_p \cong Z$, то для всякой p-группы A имеем $A \otimes R \cong A \otimes B_p \cong A$. Если $B_p \cong Z(p^k)$, то структура R-модуля существует только на ограниченных группах с условием $p^k A = 0$. Очевидно, что для всех таких групп верно $A \otimes Z(p^k) \cong A$. Следовательно, $A \otimes R \cong A$ и A

является $T(R)$-группой. $\square$

Следствие 9.2. *Пусть $A = \oplus_{p\in P} A_p$ – периодическая группа. Тогда на группе A существует структура $T(R)$-модуля тогда и только тогда, когда*
1) $A_p = 0$ для всех таких простых чисел p, что $r_p(R) \neq 1$;
2) $p^k A_p = 0$ для всех p, для которых p-базисной подгруппой группы R^+ является $Z(p^k)$.

Доказательство. Пусть $r_p(R) \neq 1$. Из доказательства теоремы 8.3 видно, что в этом случае p-группа не может быть $T(R)$-группой. Если $r_p(R) = 1$, то либо $B_p \cong Z$, либо $B_p \cong Z(p^k)$. В первом случае $A \otimes R \cong A \otimes B \cong A \otimes Z \cong A$ для всякой p-группы, а во втором случае структура модуля над таким кольцом может быть определена только на ограниченных p-группах таких, что $p^k A = 0$.

Из теоремы [Pie1] и следствия 9.2 можно получить

Следствие 9.3. *Пусть A – периодическая группа. Тогда если $A \in \mathcal{E}(R)$, то $A \in \mathcal{T}(R)$.*

Предложение 9.4. *Пусть $R = Q_p^*$. Группа $A \in \mathcal{T}(R)$ тогда и только тогда, когда A – p-группа.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $A \in \mathcal{T}(Q_p^*)$. Так как $r_0(J_p) > 1$, то A – периодическая группа. Предположим, что $A = \oplus_{q\in P} A_q$. Тогда $A \otimes R \cong \oplus_{q\in P}(A_q \otimes Q_p^*)$. Далее, при $q = p$ имеем $A_p \otimes J_p \cong A_p \otimes Z \cong A_p$ (так как Z – p-базисная подгруппа J_p), а при $q \neq p$: q-базисная подгруппа группы J_p – нулевая группа, поэтому $A \otimes R \cong A$ может выполняться в том и только в том случае, когда A – p-группа.

Достаточность. Если A – p-группа, то

$$A \otimes J_p \cong A \otimes Z \cong A. \ \square$$

Данное утверждение показывает, что для $R = Q_p^*$ имеем $\mathcal{T}(R) \neq mod\text{-}R$. Таким образом, существуют p-адические модули, которые не являются $T(R)$-модулями. Так, даже сама группа J_p как модуль над Q_p^* не является T-модулем: $J_p \otimes J_p \cong J_p \oplus D$ для некоторой делимой группы D.

Следствие 9.5. *Для любой периодической группы A существует такое кольцо R, что $A \in \mathcal{T}(R)$. А именно, $R = \prod_{p\in P} Q_p^*$ для периодической группы $A = \oplus_{p\in P} A_p$.*

Доказательство. Пусть $A = \oplus_{p\in P} A_p$. Рассмотрим тензорное произведение $A \otimes_Z R$:

$$A \otimes R \cong \oplus_{p\in P}(A_p \otimes \textstyle\prod_{p\in P} Q_p^*) \cong \oplus_{p\in P}(A_p \otimes B_p) \cong \oplus_{p\in P}(A_p \otimes Z) \cong A.$$

Так как p-базисная подгруппа аддитивной группы кольца Q_p^* изоморфна Z, а p-базисные подгруппы аддитивных групп всех других колец Q_q^*, $q \neq p$ – нулевые, то $B_p(\prod_{q\in P} Q_q^*) \cong Z$. $\square$

Кольца целых p-адических чисел и их прямые произведения представляют собой важный класс колец без кручения, над которыми существуют T-модули. Далее будет показано, что всякое кольцо R ранга без кручения больше 1, для которого $\mathcal{T}(R) \neq \{0\}$, некоторым образом связано с кольцами целых p-адических чисел.

Пример 9.6. Рассмотрим кольцо $R = \prod Q_p^*$ – прямое произведение Q_p^* для всех простых чисел p. Положим $I = \prod_{q\neq p} Q_q^*$. Тогда $R/I = \overline{R} = Q_p^*$, и всякая p-группа является $T(R)$-группой. Такое кольцо

R универсально в смысле существования T-модулей. Всякая периодическая группа есть T-модуль над этим кольцом.

Далее опишем периодические группы, являющиеся T-модулями над $E(A)$ и $Z(E(A))$. Учитывая, что для всякого $T(R)$-модуля A_R верно включение $R_L \subseteq Z(E(A))$ (предложение 4.4), важно исследовать группы, которые являются T-модулями над $Z(E(A))$, так как это дает информацию о тех кольцах R, над которыми A может быть T-модулем.

Начнем с изучения таких групп в классе p-групп.

Предложение 9.7. *Всякая периодическая группа является T-модулем над центром своего кольца эндоморфизмов.*

Доказательство. Пусть сначала A – p-группа. Рассмотрим кольцо $Z(E(A))$. Согласно теореме Шарля-Капланского [Ф4], если A – ограниченная p-группа, то $Z(E(A)) \cong Z_{p^k}$, где p^k – максимальный порядок элементов группы A, и $Z(E(A)) \cong Q_p^*$ для неограниченной p-группы A.

В первом случае $Z(E(A))$ – T-кольцо, следовательно, A – T-модуль. Во втором случае

$$A \otimes J_p \cong A \otimes Z \cong A,$$

так как Z – p-базисная подгруппа группы J_p.

Пусть теперь A – периодическая группа. Рассмотрим ее разложение в прямую сумму p-компонент: $A = \oplus_{p \in P} A_p$. Известно, что $E(A)$ и $Z(E(A))$ есть прямые произведения

$$E(A) \cong \prod_p E(A_p), \quad Z(E(A)) \cong \prod_p Z(E(A_p)).$$

Далее, запишем канонические изоморфизмы

$$A \otimes_Z Z(E(A)) \cong (\oplus_{p\in P} A_p) \otimes_Z Z(E(A)) \cong \oplus_{p\in P}(A_p \otimes_Z Z(E(A))).$$

Если покажем, что существует канонический изоморфизм

$$A_p \otimes \prod_{q \in P} R_q \cong A_p$$

(где $R_q \cong Z_{q^k}$ или $R_q \cong Q_q^*$) для произвольной p-группы, то утверждение будет доказано.

Установим канонический изоморфизм $A_p \otimes \Pi_{q \in P} Z(E(A_q)) \cong A_p$ для фиксированного простого числа p. Для p-групп уже доказано, что $A_p \otimes Z(E(A_p)) \cong A_p$. Осталось показать, что p-базисная подгруппа B_p прямого произведения $\Pi_{q \in P} Z(E(A_q))$ изоморфна либо $Z(p^k)$, либо Z (в зависимости от того, является ли группа A_p ограниченной или нет). Очевидно, p-базисные подгруппы групп $Z(q^s)$ и J_q нулевые.

Можно утверждать, что p-базисная подгруппа прямого произведения изоморфна Z или $Z(p^k)$. Итак, имеем

$$A \otimes_Z Z(E(A)) \cong \oplus(A_p \otimes \Pi\, Z(E(A_p))) \cong \oplus(A_p \otimes B_p) \cong (\oplus_{p \in P_1}(A_p \otimes Z))$$
$$\oplus(\oplus_{q \in P_2}(A_q \otimes Z(q^k))) \cong (\oplus_{p \in P_1} A_p) \oplus (\oplus_{q \in P_2} A_q) = \oplus_{p \in P} A_p = A,$$

где P_1 – множество простых чисел, для которых A_p – неограниченная группа, а P_2 – множество простых чисел таких, что $p^k A_p = 0$, и $P = P_1 \cup P_2$. Итак, $A \otimes_Z Z(E(A)) \cong A$ – канонический изоморфизм. □

Обратимся к исследованию групп, являющихся T-модулями над кольцами эндоморфизмов. Класс таких групп значительно меньше, так как для того, чтобы группа была T-модулем над $E(A)$, необходимо, чтобы $E(A)$ было E-кольцом, следовательно, коммутативным кольцом. Но групп с коммутативными кольцами эндоморфизмов существует не так много. Рассмотрим примарные и периодические группы. Здесь можно дать полный ответ на вопрос, когда группа является T-модулем над $E(A)$.

Предложение 9.8. *1) p-группа A является T-модулем над $E(A)$ тогда и только тогда, когда $A \cong Z(p^\infty)$ или $A \cong Z(p^k)$ для некоторого натурального числа k.*
2) периодическая группа A является T-модулем над $E(A)$ тогда и только тогда, когда A – подгруппа в Q/Z.

Доказательство. Известно, что для периодической группы кольцо $E(A)$ коммутативно тогда и только тогда, когда A – подгруппа в Q/Z. Пусть A – p-группа. В этом случае $E(A)$ коммутативно, если и только если $A \cong Z(p^\infty)$ или $A \cong Z(p^k)$.

1) Пусть p-группа A есть T-модуль над $E(A)$. Тогда $E(A)$ есть E-кольцо, следовательно, коммутативное кольцо. Тогда A – подгруппа в Q/Z. Подгруппами в Q/Z, которые являются p-группами, могут быть только $Z(p^k)$ или $Z(p^\infty)$.

Обратно, пусть $A \cong Z(p^k)$ или $A \cong Z(p^\infty)$. В первом случае $E(A) \cong Z_{p^k}$; это – T-кольцо, следовательно, A – T-модуль над $E(A)$. Во втором случае $E(A) \cong Q_p^*$, и $E(A) \otimes A \cong Z(p^\infty) \otimes Q_p^* \cong Z(p^\infty)$.

2) Пусть периодическая группа A является T-модулем над $E(A)$. Тогда $E(A)$ коммутативно и A – подгруппа в Q/Z.

Обратно, пусть A – подгруппа в $Q/Z = \oplus_p Z(p^\infty)$. Тогда $A \cong \oplus_{p\in P} C_p$, где P – некоторое множество простых чисел, C_p – коциклические группы, $C_p \cong Z(p^k)$ или $Z(p^\infty)$. Далее, $E(A) \cong \Pi_{p\in P} E(C_p)$, причем для каждого $p \in P$ $E(C_p) \cong Z_{p^k}$ или Q_p^*. Тогда

$$A \otimes E(A) \cong \oplus_{p\in P}(\Pi_{p\in P} E(C_p) \otimes C_p) \cong \oplus_{p\in P}(B_p \otimes C_p) \cong$$
$$\oplus_{p\in P_1}(Z(p^k) \otimes C_p) \oplus \oplus_{p\in P_2}(Q_p^* \otimes C_p) \cong \oplus_{p\in P} C_p \cong A.$$

Отсюда видно, что p-базисная подгруппа прямого произведения $\Pi_{p\in P_1} Z(p^k) \times \Pi_{p\in P_2} Q_p^*$ изоморфна либо $Z(p^k)$, либо Z. Тогда $E(A) \otimes A \cong$

A – канонический изоморфизм и A – T-модуль над $E(A)$. $\square$

§ 10. СТРОЕНИЕ $T(R)$-ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ

В силу теоремы 8.3 в этом параграфе фактически можно иметь дело только с кольцами ранга без кручения 1.

Проблему описания T-модулей над кольцами ранга без кручения 1 можно разделить на два случая. Первый – когда R является кольцом без кручения ранга 1, второй – когда R – смешанное кольцо и $r_0(R) = 1$. В том и другом случае $r_0(R/ < 1 >) = 0$.

Понятия харатеристики элемента, типа элемента и типа группы без кручения изложены в [Ф4]. Символ $T(R)$ далее будет обозначать периодическую часть кольца R; с другой стороны, свойство быть $T(R)$-модулем. Из контекста в каждом случае будет понятно, что имеется в виду.

Лемма 10.1. *Всякая делимая группа без кручения является $T(R)$-группой для всякого кольца R ранга без кручения 1.*

Доказательство. Пусть R – некоторое кольцо ранга без кручения 1. Структура R-модуля на делимой группе A без кручения определяется естественным образом как структура притягивающего модуля относительно гомоморфизма колец $h : R \to Q$. При этом $T(R)$ – периодическая часть кольца – является аннулятором модуля A_R. Далее, $A \to A \otimes R$ – мономорфизм, поскольку A – группа без кручения и $A \otimes Z \to A \otimes R$ – мономорфизм. Верно также, что $A \otimes R/ < 1 >= 0$, так как $R/ < 1 >$ – периодическая группа. □

Замечание. Отсюда следует, что на группе без кручения может быть определена структура T-модуля над кольцом R тогда и только тогда, когда ее редуцированная часть является T-группой. Действительно, пусть $A = D \oplus B$ – прямое разложение группы A, где D –

делимая группа, B – редуцированная, причем A – T-модуль над кольцом R. Тогда ранг без кручения кольца R равен 1 и D – подмодуль в A. Далее, $A = D \oplus B$ – прямое разложение модуля A_R и по предложению 5.1 B есть T-модуль. Обратно, если редуцированная часть группы без кручения является $T(R)$-модулем, то $r_0(R) = 1$, D – $T(R)$-модуль и прямая сумма $T(R)$-модулей снова является $T(R)$-модулем.

Теперь можно дать полную классификацию колец, над которыми существуют T-модули.

Теорема 10.2. *Над кольцом R существуют $T(R)$-модули тогда и только тогда, когда либо $r_0(R)$ = 1, либо существует такое простое число p, что $r_p(R) = 1$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть класс $\mathcal{T}(R)$ непуст. Рассмотрим ранг без кручения аддитивной группы кольца R. Если $r_0(R) \neq 1$, то по теореме 8.3 структура T-модуля может быть задана только на периодических группах. Тогда существует хотя бы одна p-группа, которая является T-модулем. Следовательно, по теореме 9.1 для данного числа p имеем $r_p(R) = 1$.

Достаточность. Пусть $r_0(R) = 1$. Тогда всякая делимая группа без кручения является $T(R)$-группой (лемма 10.1). Если же $r_p(R) = 1$ для некоторого простого числа p, то p-базисная подгруппа группы R^+ изоморфна либо Z, либо $Z(p^k)$. В первом случае для всякой p-группы верно $A \otimes_Z R \cong A \otimes_Z B_p \cong A$ [Ф1], следовательно, всякая p-группа является $T(R)$-группой. Во втором случае изоморфизм $A \otimes_Z B_p \cong A$ возможен лишь в случае, когда $p^k A = 0$. В частности, в качестве A можем взять саму группу $Z(p^k)$. Эта циклическая группа является $T(R)$-группой. □

Сначала рассмотрим кольца без кручения ранга 1. Всякое такое кольцо – это подкольцо поля Q, и известно [Bow1], что это – T-кольцо. Тогда, согласно следствию 3.10, все R-модули являются $T(R)$-модулями. Итак, для таких колец проблема решается полностью. Любая группа A, на которой есть структура R-модуля, является $T(R)$-группой, иначе говоря, $\mathcal{T}(R) = mod\text{-}R$. В частности, все делимые группы без кручения есть $T(R)$-модули над любым кольцом без кручения ранга 1. Далее, рациональные группы, имеющие соответствующий тип (такой, что существует структура R-модуля, определяемая через гомоморфизм колец $\rho : R \to E(A)$), а также прямые суммы рациональных групп, имеющих такие типы.

Фактически, для того, чтобы описать класс $T(R)$-групп над кольцом без кручения ранга 1, нужно выяснить, на каких группах A существует структура модуля над R (тогда A будет $T(R)$-модулем). Обозначим $D(A) = \{pA = A \mid p$ – простое число $\}$, $P(A) = \{pA \neq A \mid p$ – простое число $\}$.

Теорема 10.3. *Пусть R – кольцо без кручения ранга 1, A – группа. Тогда A является $T(R)$-группой тогда и только тогда, когда $D(R) \subseteq D(A)$.*

Доказательство. Пусть $p \in D(R)$. Отметим, что тогда идемпотентный тип t кольца R содержит символ ∞ на месте p. Покажем, что если на группе A существует структура R-модуля над кольцом R, то $pA = A$. Действительно, для всех пар $(a, r), a \in A, r \in R$ задано отображение $a \cdot r \to b$, где $b \in A$. Кольцо R p-делимо, то есть для любых $k \in N, r \in R$ разрешимо уравнение $p^k x = r$. Пусть $r_1 \in R$ – решение этого уравнения. Тогда имеем

$$ar = a(p^k r_1) = p^k(ar_1) = b,$$

где $ar_1 \in A$. Таким образом, уравнение $p^k x = b$ разрешимо для любого $k \in N$ и $b \in A$. Следовательно, $h_p(b) = \infty$ для любого элемента $b \in A$, откуда следует p-делимость группы A.

Обратно, пусть группа A p-делима для всех p, для которых $pR = R$. Кольцо R порождено единицей и числами $1/p$ для всех $p \in D(R)$. Определим структуру R-модуля на A следующим образом. Пусть $r \in R$. Тогда $r = m/n = m(1/p_1^{s_1} \cdot \ldots \cdot 1/p_k^{s_k})$, $ar = ma \cdot (1/p_1^{s_1}) \cdot \ldots \cdot (1/p_k^{s_k})$. Так как R – T-кольцо и A – модуль над R, то A – $T(R)$-модуль. □

Перейдем к рассмотрению смешанных колец ранга без кручения 1. Здесь $R/ < 1 >$ – периодическая группа. Так как $r_0(R) = 1$, то $R/T(R)$ есть кольцо ранга 1 и, следовательно, это T-кольцо. Таким образом, если на группе A существует модульная структура над кольцом $R/T(R)$, то A обязательно есть T-модуль над $R/T(R)$.

Предложение 10.4. *Пусть R – смешанное кольцо ранга без кручения 1, A – группа без кручения. Тогда*

1) $A \in mod\text{-}R/T(R)$ тогда и только тогда, когда $A \in mod\text{-}R$;

2) если $A \in mod\text{-}R$, то $A \in \mathcal{T}(R)$ тогда и только тогда, когда $A \otimes T(R) = 0$.

Доказательство. 1) Заметим, что если группа A является модулем над кольцом $R/T(R)$ ранга 1, то A – также модуль над R. Рассмотрим канонический гомоморфизм $e : R \to R/T(R)$. Структура модуля над R может быть задана как структура притягивающего модуля относительно гомоморфизма e.

С другой стороны, покажем, что для группы без кручения A из условия $A \in mod\text{-}R$ следует $A \in mod\text{-}R/T(R)$. Пусть существует элемент $r \in T(R)$ такой, что $r \notin Ann_R A$. Тогда для некоторого $a \in A$ имеем $ar \neq 0$. Однако $r \in T(R)$, поэтому существует натуральное число n

такое, что $n(ar) = a(nr) = 0$. Для ненулевого элемента $b = ar \in A$ получили $nb = 0$. Но A – группа без кручения и такое невозможно. Следовательно, $ar = 0$ для всех $r \in R$ и $a \in A$. Значит, $T(R) \subseteq Ann_R A$. Более того, поскольку ранг без кручения кольца R равен 1, можно утверждать $T(R) = Ann_R A$. Модульная структура на группе A над кольцом $R/T(R)$ может быть определена естественным образом как

$$a \cdot \overline{r} = a \cdot (r + T(R)) = ar.$$

Итак, R-модуль является также $R/T(R)$-модулем.

2) Пусть на группе A есть структура R-модуля. Тогда согласно 1) A является также модулем над кольцом $R/T(R)$. Здесь $R/T(R)$ – кольцо ранга 1 и A является T-модулем над этим кольцом. Пусть A – $T(R)$-модуль, где A – группа без кручения. Так как $T(R) = Ann_R A$, то по предложению 6.4 имеем $A \otimes Ann_R A = 0$, то есть $A \otimes T(R) = 0$.

Обратно, если $A \otimes T(R) = 0$, то $A \otimes Ann_R A = 0$. Следовательно, выполнено условие 2) предложения 6.4. Условие 1) предложения 6.4 выполнено ввиду того, что $R/T(R)$ – кольцо без кручения ранга 1. Тогда $A \in \mathcal{T}(R)$. $\square$

Выясним строение факторгруппы R_0 для смешанного кольца R ранга без кручения 1. Для такого кольца $R/T(R)$ – подкольцо поля Q, а R_0 – периодическая группа. В доказательстве теоремы 10.5 рассматривается взаимосвязь между идеалом $T(R)$, факторкольцом $R/T(R)$ и разложением группы R_0 на p-компоненты. Так как $R/T(R)$ – кольцо ранга 1, то ему соответствует идемпотентный тип t. Напомним, что тип t называется идемпотентным, если он содержит характеристику, состоящую только из нулей и символов ∞.

Пусть A – (редуцированная) группа без кручения. Пусть

$T(R) = \oplus_{p \in P} R_p$. Обозначим через R_A подкольцо поля Q, порожденное единицей и элементами вида $1/p$ для всех простых чисел $p \in D(A)$. Тогда на группе A модульная структура над кольцом R_A может быть определена так же, как в окончании доказательства теоремы 10.3: для $r = m/n = m(1/p_1^{s_1} \cdot \ldots \cdot 1/p_k^{s_k})$ имеем

$$ar = ma \cdot (1/p_1^{s_1}) \cdot \ldots \cdot (1/p_k^{s_k}).$$

Кольцо R_A имеет идемпотентный тип, причем символы ∞ соответствуют тем простым числам p, для которых $pA = A$.

Теорема 10.5. *Пусть A – группа без кручения, R – кольцо ранга без кручения 1. Группа A является $T(R)$-группой тогда и только тогда, когда $pA = A$ для всех p, для которых либо $R_p \neq 0$, либо $p \cdot R/T(R) = R/T(R)$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала строение группы R_0 в зависимости от идеала $T(R)$ и факторкольца $R/T(R)$. Докажем, что если R – кольцо ранга без кручения 1, то группа R_0 является прямой суммой p-компонент для всех простых чисел p, для которых в характеристике, задающей тип t, содержатся символы ∞, и всех простых чисел p, для которых идеал $T(R)$ содержит ненулевую p-компоненту.

Пусть R – кольцо без кручения ранга 1 и простому числу p соответствует символ ∞. Тогда всякое уравнение $p^k x = r$ разрешимо при любом натуральном k. В частности, для $r = 1_R$ уравнение $p^k x = 1$ разрешимо при любом k, следовательно, $p^k(x + < 1 >) =< 1 >$. Элемент $\overline{x} = x + < 1 >$ имеет порядок p^k в группе R_0. Отсюда следует, что в R_0 есть ненулевая p-компонента. Отметим, что данная p-компонента изоморфна квазициклической группе $Z(p^\infty)$. Итак, если R – кольцо без кручения ранга 1, то группа R_0 является прямой суммой p-компонент для всех простых чисел p, для которых в характеристике, задающей тип t, содержатся символы ∞.

Пусть теперь R – смешанное кольцо ранга без кручения 1. Рассмотрим некоторую p-компоненту R_p периодической части $T(R)$ кольца R. Пусть $r \in R_p$, тогда существует $k \in N$ такое, что $p^k r = 0$. Для смежного класса $\overline{r} \in R_0$ получаем

$$p^k \overline{r} = p^k(r + < 1 >) =< 1 >,$$

то есть $\overline{r}$ принадлежит p-компоненте группы R_0, причем $\overline{r} \neq 0$.

Пусть кольцо $R/T(R)$ p-делимо. Это эквивалентно тому, что тип t факторкольца $R/T(R)$ содержит символ ∞ на месте, соответствующем числу p. Тогда уравнение

$$p^k \overline{x} = \overline{r} = r + T(R)$$

разрешимо в $R/T(R)$ при любом натуральном k. (Обратим внимание, что теперь $\overline{r}$ обозначает смежный класс по $T(R)$.) В частности, разрешимо уравнение

$$p^k \overline{x} = p^k(x + T(R)) = 1_R + T(R),$$

где $\overline{x} \in R/T(R)$.

Если предположить, что $p^k x \in T(R)$, то имели бы $p^k(x + T(R)) = T(R)$. Однако $Char\, R = 0$, поэтому $1_R \notin T(R)$ и $p^k x \in T(R)$ невозможно. Следовательно, $p^k x = 1_R$. Тогда $p^k(x + < 1 >) =< 1 >$, то есть порядок элемента $\overline{x} = x + < 1 >$ в группе R_0 равен p^k. Следовательно, группа R_0 содержит ненулевую p-компоненту. Дополнительно заметим, что поскольку $h_p(\overline{r}) = \infty$ для всякого $\overline{r} \in R_0$, то $h_p(\overline{1}) = \infty$ и элемент x порядка p^k существует для любого натурального k.

Итак, известно строение группы R_0 для смешанного кольца R ранга без кручения 1. Эта группа состоит в точности из таких p-компонент, что либо для числа p соответствующая p-компонента в $T(R)$ отлична от нуля, либо кольцо $R/T(R)$ p-делимо.

Рассмотрим теперь группу A. Заметим, что подкольцо R_A по построению лежит в центре кольца эндоморфизмов группы A, так как состоит из умножений на рациональные числа. Пусть A – $T(R)$-группа. Тогда для нее выполнено условие $A \otimes R_0 = 0$. В доказательстве предложения 10.4 показано, что $T(R) = Ann_R A$. Следовательно, умножение $a \cdot r$ совпадает с $a \cdot \overline{r}$, где $\overline{r}$ – смежный класс в $R/T(R)$, содержащий r. В то же время по предложению 6.3 на группе A существует единственная структура R-модуля. Следовательно, модульная структура на A над кольцом $R/T(R)$ однозначно определяется как структура притягивающего модуля относительно гомоморфизма $h : R/T(R) \to R_A$ и тогда $R/T(R) \subseteq R_A$.

Имеем $R_0 = \oplus_{p\in P} R_p^0$, где P – множество таких простых чисел, что либо $R_p \neq 0$, либо $p \cdot R/T(R) = R/T(R)$. Имеем также $A \otimes R_0 = 0$. Откуда $A \otimes R_p^0 = 0$ для каждого $p \in P$. Допустим, что $pA \neq A$ и пусть B_p – p-базисная подгруппа группы A. Тогда $B_p \cong \oplus_{r_p(A)} Z$, где $r_p(A) \geq 1$. Так как $A \otimes R_p^0 \cong B_p \otimes R_p^0$ [Ф3] и $B_p \otimes R_p^0 \cong \oplus_{r_p(A)}(Z \otimes R_p^0) \cong \oplus_{r_p(A)} R_p^0$, то получаем противоречие с $A \otimes R_p^0 = 0$. Значит, $pA = A$ для всех $p \in P$.

Достаточность. Пусть A является p-делимой для всех таких p, для которых либо $R/T(R)$ – p-делимое кольцо, либо существует ненулевая p-компонента в $T(R)$. По теореме 10.3 A является T-модулем над кольцом $R/T(R)$. По предложению 10.4 пункт 1) A является модулем и над кольцом R. Поскольку $A \otimes R_p = 0$ для всех p-компонент R_p периодической части кольца R, то $A \otimes T(R) = 0$, откуда по пункту 2) предложения

10.4 получаем, что A – $T(R)$-модуль. □

Пусть R – кольцо ранга без кручения 1. Запишем $T(R) = \oplus_{p\in P}R_p$. Составим характеристику χ_0 следующим образом. Если $R_p \neq 0$ или $p \cdot R/T(R) = R/T(R)$, то на соответствующем месте поставим символ ∞, в противном случае – 0. Пусть t_0 – тип, содержащий данную характеристику. Тип t_0 зависит только от кольца R, и далее он будет использоваться для описания некоторых классов $T(R)$-групп.

Следствие 10.6. *Пусть $A = \prod_{i\in I} A_i$ – прямое произведение групп без кручения. Тогда если все A_i – $T(R)$-группы, то A – $T(R)$-группа.*

Доказательство. Если A_i – $T(R)$-группы, то они все являются p-делимыми для некоторого набора простых чисел p, определяемого кольцом R. Известно, что прямое произведение p-делимых групп есть p-делимая группа. Тогда по теореме 10.5 A – $T(R)$-группа. □

Следствие 10.7. *Пусть R – кольцо ранга без кручения 1, A – группа без кручения. Тогда*
1) $A \in \mathcal{T}(R)$ тогда и только тогда, когда для любого элемента $a \in A$ выполнено условие $t(a) \geq t_0$;
2) если A – однородная группа типа t, то $A \in \mathcal{T}(R)$ тогда и только тогда, когда $t \geq t_0$;
3) если A – вполне разложимая или векторная группа, то $A \in \mathcal{T}(R)$ тогда и только тогда, когда для каждой компоненты A_i ранга 1 выполнено условие $t(A_i) \geq t_0$;
4) если A – сепарабельная группа, то $A \in \mathcal{T}(R)$ тогда и только тогда, когда для каждого ее прямого слагаемого C ранга 1 верно $t(C) \geq t_0$.

Доказательство. 1) Если для всякого $a \in A$ выполнено условие

$t(a) \geq t_0$, это означает, что для набора простых чисел, определенного при построении t_0 перед следствием 10.6, $h_p(a) = \infty$. Это эквивалентно тому, что уравнение $p^k x = a$ разрешимо при любом натуральном k, то есть $pA = A$. Тогда по теореме 10.5 A является $T(R)$-группой.

Аналогично доказывается пункт 2).

3) Если A – вполне разложимая группа, то $A = \oplus_{i \in I} A_i$, $r(A_i) = 1$ для всех $i \in I$. Тогда по предложению 5.1 каждое прямое слагаемое A_i есть $T(R)$-группа. Осталось сослаться на 2).

Если A – векторная группа, причем каждое слагаемое ранга 1 есть $T(R)$-группа, то все A_i являются p-делимыми для набора простых чисел p, которым соответствует символ ∞ в t_0. Известно, что прямое произведение p-делимых групп является p-делимой группой. Поэтому $\prod A_i$ удовлетворяет условиям теоремы 10.5 и является $T(R)$-группой. Структура модуля при этом задается естественным образом:

$$(a_1, ..., a_n, ...) \cdot r = (a_1 \cdot r, ..., a_n \cdot r, ...).$$

4) В сепарабельной группе без кручения каждый элемент содержится в некотором прямом слагаемом, являющемся прямой суммой групп ранга 1. Тогда если типы всех прямых слагаемых ранга 1 удовлетворяют условию $t(C) \geq t_0$, то типы всех элементов также удовлетворяют этому условию. Следовательно, по теореме 10.5 A является $T(R)$-группой. $\square$

Итак, задача описания T-модулей над смешанными кольцами R ранга без кручения 1 в классе групп без кручения решена. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы на такой группе A существовала структура $T(R)$-модуля, является ее p-делимость на определенный набор простых чисел, который однозначно определяется кольцом R.

Перейдем к рассмотрению групп без кручения, которые являются T-модулями над $Z(E(A))$ и $E(A)$. Здесь, очевидно, полный ответ невозможен ввиду необозримости класса всех групп без кручения; однако для многих классов групп без кручения строение кольца $Z(E(A))$ хорошо известно. Так, для некоторых групп A кольцо $Z(E(A))$ изоморфно подкольцу поля Q, то есть является T-кольцом. В качестве одного из примеров можно рассмотреть нередуцированную группу без кручения. Она является T-модулем над центром своего кольца эндоморфизмов. Известно [K5], что центр кольца эндоморфизмов всякой нередуцированной группы без кручения состоит из умножений на рациональные числа m/n такие, что $nA = A$, то есть $Z(E(A))$ изоморфно некоторому подкольцу поля Q, и $Z(E(A))$ является T-кольцом [Bow1]. Тогда A есть T-модуль над $Z(E(A))$. По той же причине всякая однородная сепарабельная группа A без кручения является T-модулем над $Z(E(A))$. С другой стороны, если группа без кручения A является T-модулем над $E(A)$, это накладывает существенные ограничения на кольцо $E(A)$.

Предложение 10.8. *Группа без кручения является T-модулем над своим кольцом эндоморфизмов (центром кольца эндоморфизмов) тогда и только тогда, когда кольцо эндоморфизмов (центр кольца эндоморфизмов) есть подкольцо поля Q.*

Доказательство. Заметим, что всякая группа A как модуль над $E(A)$ или $Z(E(A))$ является точным модулем. Если $E(A)$ – кольцо без кручения ранга 1, то $E(A)$ – T-кольцо, следовательно, A – T-модуль над $E(A)$.

Обратно, если группа A без кручения является T-модулем над $E(A)$, то по теореме 8.3 ранг без кручения этого кольца равен 1, а так как $T(E(A)) \subseteq Ann_{E(A)}A = 0$, то $E(A)$ – кольцо без кручения ранга 1.

Аналогично для $Z(E(A))$. □

Далее будем рассматривать класс сепарабельных групп без кручения. Группа без кручения A называется сепарабельной, если всякое конечное множество ее элементов содержится в некотором вполне разложимом прямом слагаемом группы A. Напомним, что множество $\Omega(A)$ типов всех прямых слагаемых ранга 1 группы A определенным образом разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности: $\Omega(A) = \bigcup_{k \in K} \Omega_k$ (см. предложение 1.14 и абзац перед ним).

Теорема 10.9. *Пусть A – сепарабельная группа без кручения. Следующие условия эквивалентны:*

1) A является T-модулем над кольцом $Z(E(A))$;

2) A неразложима в прямую сумму ненулевых вполне характеристических подгрупп;

3) любые два типа $s, t \in \Omega(A)$ эквивалентны.

Доказательство. Пусть сепарабельная группа без кручения A является T-модулем над кольцом $Z(E(A))$. Тогда $Z(E(A))$ – кольцо ранга без кручения 1. Если допустить, что это смешанное кольцо, то как было показано выше, его периодическая часть входит в аннулятор модуля A. Однако A является точным $Z(E(A))$-модулем, поэтому $Ann_{Z(E(A))}A = 0$, откуда следует, что $Z(E(A))$ – кольцо без кручения ранга 1. Отсюда по предложению 1.15 следуют 2) и 3).

Обратно, пусть выполнены условия 2) или 3). Тогда по предложению 1.15 $Z(E(A))$ – кольцо ранга 1. Следовательно, это T-кольцо и A – T-модуль над $Z(E(A))$. □

Отметим также, что если центр кольца эндоморфизмов сепарабельной группы – T-кольцо, то A является T-модулем и строение $Z(E(A))$, указанное в следствии 1.16, следует из теоремы 10.3.

Перейдем к рассмотрению сепарабельных групп как модулей над кольцом $E(A)$.

Следствие 10.10. *Сепарабельная группа A без кручения является T-модулем над $E(A)$ тогда и только тогда, когда она является группой ранга 1.*

Доказательство. Пусть группа A является T-модулем над $E(A)$. Заметим, что A – точный модул. По теореме 6.1 $E(A)$ – E-кольцо, следовательно, оно является коммутативным кольцом [Sc1]. Отсюда по предложению 1.17 следует, что группа A является прямой суммой групп ранга 1 несравнимых типов. Однако если она содержит больше чем одно прямое слагаемое, то ранг кольца $E(A)$ больше 1, что невозможно ввиду теоремы 8.3. Итак, A – группа ранга 1.

Обратно, всякая группа без кручения ранга 1 является T-модулем над своим кольцом эндоморфизмов. Действительно, кольцо эндоморфизмов группы ранга 1 есть кольцо ранга 1, то есть T-кольцо. Следовательно, ${}_{E(A)}A$ – T-модуль. □

Замечание. Результаты третьей главы содержат, в частности, описание T-колец, полученное в [Bow1]. Пусть, например, R – кольцо без кручения, являющееся T-кольцом, то есть R_R – T-модуль. R^+ – группа без кручения, следовательно, $r_0(R) = 1$, а отсюда следует, что R есть кольцо без кручения ранга 1.

В заключение автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Крылову Петру Андреевичу за постановку задач, полезные обсуждения и помощь в оформлении диссертации.

ЛИТЕРАТУРА

[Б1] Бурбаки Н. Коммутативная алгебра. М., "Мир", 1971.

[В1] Ван дер Варден. Алгебра. М., Наука, 1976.

[К1] Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. М., Изд. иностр. лит., 1960.

[К2] Каш Ф. Модули и кольца. М., "Мир", 1981.

[К3] Классен Е.Д. Центр кольца эндоморфизмов сепарабельной абелевой группы без кручения // 3-й Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-98): тезисы докладов. Ч.5. С.17.

[К4] Крылов П.А. Абелевы группы без кручения как модули над своими кольцами эндоморфизмов // Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1996. Вып. 13, 14. С. 77 - 104.

[К5] Крылов П.А., Классен Е.Д. Центр кольца эндоморфизмов расщепляющейся смешанной абелевой группы // Сиб.матем.ж., 1999, Т.40, N.5. С.1074-1085.

[К6] Куликов Л.Я. Обобщенные примарные группы, I // Труды Моск. матем. об-ва. 1952. Т.1, С.247 - 326.

[Л1] Ламбек И. Кольца и модули. М., "Мир", 1971.

[Л2] Ленг С. Алгебра. М., "Мир", 1968.

[М1] Малышев Е.Б., Себельдин А.М. A-мультипликативные абелевы группы. // Всесибирские чтения по математике и механике, 1997. Тезисы докладов. С.24-25.

[М2] Марков В.Т.,Михалев А.В.,Скорняков Л.А.,Туганбаев А.А. Кольца эндоморфизмов модулей и структуры подмодулей. // "Итоги науки и техники", серия "Алгебра, топология, геометрия". М., ВИНИТИ, 1983. Т.21. С.183-254.

[M3] Мишина А.П.,Скорняков Л.А. Абелевы группы и модули. М., Наука, 1969.

[C1] Скорняков Л.А. Элементы общей алгебры. М., Наука, 1983.

[Ф1] Фейс К. Алгебра: кольца,модули и категории. М., "Мир", 1977, Т.1.

[Ф2] Фейс К. Алгебра: кольца,модули и категории. М., "Мир", 1979, Т.2.

[Ф3] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М., "Мир", 1974, Т.1.

[Ф4] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М., "Мир", 1977, Т.2.

[Ar1] Arnold D., Pierse R.S., Reid J.D., Vinsonhaler C., Wickless W. Torsion-free abelian groups of finite rank projective as modules over their endomorphism rings // J.Algebra. 1981. V.71. P.1-10.

[Bow1] Bowshell R.A.,Schultz P. Unital rings whose additive endomorphism commute// Math.Ann. 1977. V.228. P.197-214.

[Dug1] Dugas M., Mader A., Vinsonhaler C. Large E-rings exist // J.Algebra. 1987. V.108. P.88-101.

[Go1] Goeters. H.Pat. Duality and self-reflexive torsion-free groups// J.Pure Appl. Algebra. 1999. V.137. No.3. P.221-235.

[L1] Lady E.L. Relations between Hom, Ext and tensor product for certain categories of modules over dedekind domains // Abelian group theory. Lecture Notes Math, 1981. V.874. P.53-61.

[Mad1] Mader A., Vinsonhaler C. Torsion-free E-modules // J.Algebra. 1988. V.115. No.2. P.401-411.

[Ne1] Neidzwecki G.P., Reid J.D. Abelian groups projective over their endomorphism rings // J.Algebra. 1993. V.159. P.139-149.

[Pie1] Pierse R.S. E-modules// Contemporary Math. 1989. V.89. P.221-240.

[Re1] Reid J.D. Abelian groups finitely generated over their endomorphism rings // Lecture Notes in Mathematics. 1981. V.874. P.41-52.

[Sc1] Schultz P. The endomorphism ring of the additive group of a ring // J.Aust.Math.Soc. 1973. V.15. P.60-69.

[Si1] Silver L. Noncommutative localizations and applications// J.Algebra. 1967. V.7. P.44-76.

Работы автора по теме диссертации:

[1] Приходовский М.А. Некоторые свойства T-модулей // Тезисы докладов II областной конференции "Молодежь и наука: проблемы и перспективы." Томск, 1998. С. 11-12.

[2] Приходовский М.А. Т-модули и их кольца эндоморфизмов// Исследования по математическому анализу и алгебре. Томск,1998. С.196-200.

[3] Приходовский М.А. Модули, изоморфные своему тензорному произведению на кольцо // Материалы XXXVII международной конференции "Студент и научно-технический прогресс". Новосибирск, 1999. С. 125-126.

[4] Приходовский М.А. Необходимые и достаточные условия для $T(R)$-модуля // Доклады III межвузовской научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Томск, 1999. С.74-75.

[5] Приходовский М.А. Обобщённые Е-модули и Е-кольца // Униерс. алгебра и её приложения. Тезисы докладов межд. семинара памяти Л.А.Скорнякова. Волгоград, 1999. С.55-56.

[6] Приходовский М.А. Некоторые свойства обобщенных T-модулей и T-колец // Исследования по математическому анализу и алгебре.

Выпуск 2. Томск, 2000. С.105-110.

[7] Приходовский М.А. Об одном критерии T-модульности // Тезисы докладов IV международной алгебраической конференции памяти Ю.И.Мерзлякова. Новосибирск, 2000. С. 150-151.

[8] Приходовский М.А. О некоторых естественных изоморфизмах, связанных с функторами $\otimes$ и Hom // Тезисы докладов Четвертого Сибирского конгресса по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ - 2000). Новосибирск, 2000. С. 113.

[9] Крылов П.А., Приходовский М.А. Обобщенные T-модули и E-модули// Труды межд. семинара памяти Л.А.Скорнякова "Универсальная алгебра и ее приложения". Волгоград, 2000. С.153-169.

[10] Приходовский М.А. О некоторых свойствах e-расширений модулей// Труды Второй сибирской школы молодого ученого. Томск, 2000. С.35-39.

[11] Приходовский М.А. О некоторых классах обобщенных $T(R)$-модулей // Абелевы группы и модули. Томск, 2000. Вып.15. С.75-87.

[12] Приходовский М.А. О каноническом изоморфизме модуля и его ковариантного расширения // Тезисы докладов международного алгебраического семинара, посвященного 70-летию научно-исследовательского семинара МГУ по алгебре. Москва, 2000. С.45-46.

[13] Приходовский М.А. Строение классов T-модулей // Тезисы докладов межд. семинара по теории групп. Екатеринбург, 2001. С.189-192.

[14] Приходовский М.А. Подкольца и факторкольца как обобщенные T-модули // Исследования по матем. анализу и алгебре. Выпуск 3. Томск, 2002. С.235-239.