Министерство образования Российской Федерации

Томский государственный университет

Посвящается
Федору Эдуардовичу
Молину (1861–1941 гг.)

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ И АЛГЕБРЕ

ВЫПУСК 3

ТОМСК – 2001

УДК 517.5, 512.5, 514.7
ББК 22.161, 22.144, 22.151
И 88

И 88 Исследования по математическому анализу и алгебре: Сборник статей. Томск: Томский государственный университет. 2001. 338 с.

В сборник включены работы по математическому анализу, алгебре, геометрии и другим разделам математики. Рассматриваются вопросы теории функций комплексного переменного, функционального анализа, абелевых и некоммутативных групп, дифференциальной геометрии.

ISBN 5-94621-010-6

УДК 517.5, 512.5, 514.7
ББК 22.161, 22.144, 22.151

Научные редакторы:
член-корреспондент РАО, профессор Александров И.А.,
профессор Крылов П.А.

ISBN5-94621-010-6

ПОДКОЛЬЦА И ФАКТОРКОЛЬЦА КАК ОБОБЩЕННЫЕ *T*-МОДУЛИ

М.А. Приходовский

Томский государственный университет

Изучаются свойства модулей, канонически изоморфных тензорному произведению $A \otimes_S R$.

Пусть R, S – ассоциативные кольца с единицей и существует кольцевой гомоморфизм $e : S \to R$. Тогда на любом R-модуле естественным образом определена структура притягивающего S-модуля, и можно рассматривать конструкции $A_{(e)} = A \otimes_S R$ и $A^{(e)} = Hom_S(R, A)$, которые называются соответственно ковариантным и контравариантным расширением модуля A_R.

Класс правых модулей над кольцом R, для которых справедливо равенство $Hom_Z(R, A) = Hom_R(R, A)$, называется классом *E(R)*-модулей [1], [2]. Класс всех абелевых групп, на которых можно задать структуру *E(R)*-модуля, обозначается $\varepsilon(R)$ [1], [2]. По аналогии с этим обозначим класс правых S-модулей, для которых выполняется равенство $Hom_S(R, A) = Hom_R(R, A)$, через $\varepsilon(S, R)$.

Введем также обозначение $\tau(S,R)$ для класса всех правых S-модулей, на которых существует структура правого R-модуля, причем так, что структура S-модуля является притягивающей и канонический эпиморфизм $A \otimes_S R \to A \otimes_R R$ является изоморфизмом.

Далее R-модули, для которых существует этот изоморфизм, будем называть *T(S,R)*-модулями [3].

В данной работе изучается вопрос о том, когда $(R/I)_R$ и R_S являются *T(S,R)*-модулями. Пусть K, S, R – кольца, причем $K \subset S \subset R$. Тогда на каждом R-модуле естественным образом определена структура S-модуля и K-модуля.

Теорема 1. *Пусть R – кольцо, K и S – собственные подкольца в R, причем $K \subset S$. Пусть также $K \subset Z(R)$. Тогда эквивалентны следующие условия:*

1. $R_S \in \tau(K,S)$;

2. для любого модуля A_S существует канонический изоморфизм $A \otimes_K R \approx A \otimes_S R$;

3. для любого модуля A_S верно равенство $Hom_K(R,A) = Hom_S(R,A)$.

Доказательство.

$1. \Rightarrow 2.$ Для модуля R_S выполняется условие $R \otimes_K S \approx R \otimes_s S$. Так как мы предположили, что $K \subset Z(R)$, то кольцо K коммутативно и $R \otimes_K S \approx S \otimes_K R$. Далее, рассмотрим произвольный модуль A_S и преобразуем выражение $A \otimes_K R$:

$$A \otimes_K R \overset{(1)}{\approx} (A \otimes_s S) \otimes_K R \overset{(2)}{\approx} A \otimes_s (S \otimes_K R) \overset{(3)}{\approx} A \otimes_s R.$$

Все изоморфизмы являются каноническими. (1) очевидно, (2) – следует из ассоциативности тензорного произведения, (3) – из условия теоремы. Таким образом, получили, что $A \otimes_K R \approx A \otimes_S R$.

2. $\Longrightarrow$ 1. Пусть для каждого модуля A_S справедливо утверждение (2). Тогда R_S – такой модуль, что для каждого модуля A_S существует канонический изоморфизм $A \otimes_K R \approx A \otimes_S R$. Полагая $A = S$, имеем изоморфизм $S \otimes_K R \approx S \otimes_S R$, *то есть* $R_S \in \tau(K,S)$.

1 $\Longrightarrow$ 3. Пусть $R_S \in \tau(K,S)$. Рассмотрим произвольный модуль A_S и построим последовательность канонических изоморфизмов:

$$Hom_S(R,A) \approx Hom_S(R \otimes_K S, A) \approx Hom_K(R, Hom_S(S,A)) \approx Hom_K(R,A).$$

Таким образом, $Hom_S(R,A) \approx Hom_K(R,A)$. Но $Hom_S(R,A)$ - подгруппа в $Hom_K(R,A)$, и если она канонически изоморфна самой группе, то совпадает с ней, то есть можем записать равенство $Hom_S(R,A) = Hom_K(R,A)$.

3 $\Longrightarrow$ 1. Пусть для произвольного модуля A_S верно равенство $Hom_K(R,A) = Hom_S(R,A)$. Тогда можно утверждать, что R_S - такой модуль, что каждый K-модульный гомоморфизм из R в A является S-модульным. Тогда по теореме из [1] модуль R_S является T-модулем относительно гомоморфизма колец $h : K \to S$.

Замечание. *При* $R = S$ *получаем как частный случай некоторые результаты из [1],[4]. Так, если* $h : K \to R$ *- эпиморфизм в катего-*

рии колец, то для всякого модуля A_R существует канонический изоморфизм $A \otimes_K R \approx A \otimes_R R$.

Теорема 2. *Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей, K – собственное подкольцо в R, I – идеал кольца R. Если $(R/I)_R \in \tau(K,R)$, то R/I является обобщенным E-кольцом, то есть $(R/I)_{R/I} \in \varepsilon(K,R/I)$.*

Доказательство. По условию теоремы имеем канонический изоморфизм

$$R/I \otimes_K R \approx R/I \otimes_R R.$$

Тогда для любого R-модуля C имеем равенство

$$Hom_K(R/I,C) = Hom_R(R/I,C). \tag{1}$$

В частности, оно верно и при $C = R/I$. Осталось доказать, что

$$Hom_R(R/I,R/I) = Hom_{R/I}(R/I,R/I). \tag{2}$$

Рассмотрим канонический гомоморфизм $h: R \to R/I$. Кольцо R/I является обобщенным $T(R)$-кольцом, так как h – наложение. Из этого следует, что каждый модуль A над кольцом R/I является обобщенным $T(R,R/I)$-модулем, то есть всякий R-модульный гомоморфизм из A в любой модуль M является R/I-модульным.

При $A = M = R/I$ получаем равенство (2). Итак, можно заключить, что $E_K(R/I) = End_{R/I}R/I$, то есть R/I является E-кольцом.

Теорема доказана.

Из данной теоремы как частный случай (при $I = 0$) следует известный факт [1] о взаимосвязи между T- и E-кольцами: всякое T-кольцо является E-кольцом.

Литература

1. Bowshell R.A., Schultz P. Unital rings whose additive endomorphism commute // Math.Ann. 1977. Vol. 228. P. 197–214.
2. Pierse R.S. E-modules // Contemporary Math. 1989. Vol. 89. P. 221–240.
3. Приходовский М.А. О некоторых классах обобщенных T-модулей // Абелевы группы и модули. Томск, 2000. Вып. 15. С. 77–89.
4. Silver L. Noncommutative localizations and applications // Journal of algebra. 1967. Vol. 7. P. 44–76.