Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

М. А. Приходовский

«Комплексные и гиперкомплексные числа»

Учебное пособие

Томск
2013

УДК 511(075)
ББК 22.141
П77

Приходовский М.А.

Комплексные и гиперкомплексные числа: учебное пособие / М.А. Приходовский - Томск: Изд-во «Иван Фёдоров», 2013. - 32 с.

В пособии изложены действия над комплексными числами, вводятся некоторые из основных функций, которые в дальнейшем изучаются в курсе ТФКП, даны некоторые обобщения (гиперкомплексные числа).

Оглавление

Введение

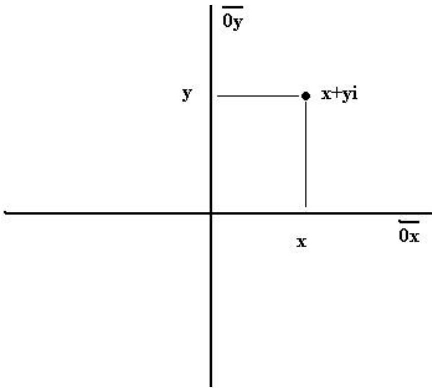
В пособии подробно с примерами и иллюстрациями изложены действия над комплексными числами, вводятся некоторые из основных функций, которые в дальнейшем будут изучаться в курсе теории функций комплексного переменного, даны некоторые обобщения - гиперкомплексные числа.

Пособие рассчитано как на студентов ММФ ТГУ, изучающих основы данной темы, так и на студентов любых факультетов и специальностей ТУСУРа, изучающих курс высшей математики. Данное пособие также может представлять интерес для студентов как материал для самостоятельной работы, а также для преподавателей при планировании занятий по данной теме.

§ 1. Действительная ось и комплексная плоскость

При изучении числовых систем в школе становится привычным понятие «действительная ось», «действительные» («вещественные») числа. Но эта система чисел является неполной, так как не содержит корни некоторых, казалось бы, простых уравнений, например $x^2+1=0$. Если у квадратичного уравнения $ax^2+bx+c=0$ отрицательный дискриминант, то есть $b^2-4ac<0$, то на действительной оси нет ни одного корня уравнения. Однако существует система условных, обобщённых чисел, где и такие уравнения тоже имеют решения. Они называются комплексными числами и геометрически соответствуют точкам на плоскости, а известная ранее действительная ось - это горизонтальная ось Ox в данной плоскости.

Корень $\sqrt{-1}$ обозначили символом i и назвали «мнимой единицей», то есть имеет место равенство $i^2=-1$. На плоскости число 1 (действительная единица) соответствует точке (1,0), потому что расположено на оси Ox, так что вполне логично и легко запомнить, что мнимая единица соответствует точке (0,1), то есть находится на конце второго базисного вектора плоскости (и расположена на оси 0y). Любая точка плоскости, имеющая координаты (x,y), в векторной записи соответствует xe_1+ye_2, где e_1 и e_2 - это базисные векторы, координаты которых (1,0) и (0,1). В комплексной плоскости первый базисный вектор соответствует 1, второй числу i, поэтому координаты произвольной точки плоскости будут иметь вид: $x\cdot 1+y\cdot i$, то есть их можно записать как $x+yi$. Это число называется комплексным числом, записанным в алгебраической форме. (Куда ставить ударение в этом слове, не так важно, потому что даже на одной и той же кафедре одни математики говорят кОмплексное, другие - комплЕксное число, окончательный вариант так и не установился).



Сложение и вычитание комплексных чисел определяется аналогично сложению и вычитанию векторов в плоскости. Сумма векторов (a,b)+(c,d) есть вектор (a+c, b+d). Если это записать с помощью обозначения базисных векторов, то

$(ae_1 + be_2) + (ce_1 + de_2) = (a+c)e_1 + (b+d)e_2$.

А в плоскости комплексных чисел это действие имеет вид:

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$.

С определением умножения также особых проблем не возникает, при умножении нужно сначала раскрыть скобки так же, как это делается в любом арифметическом выражении, а затем учесть, что $i^2 = -1$. Итак, $(a+bi)\cdot(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2$, дальше эти четыре слагаемых надо перегруппировать, и выражение содержащее i^2, присоединяется к 1-му слагаемому, ведь i^2 это действительное число (-1). Получаем $(ac-bd)+(ad+bc)i$.

Число $\bar{z} = a - bi$ называется сопряжённым для $z = a + bi$.

Интересно, что при умножении двух сопряжённых чисел в ответе всегда получится действительное число:

$z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2 i^2 + abi - abi = a^2 + b^2$.

И этим свойством пользуются при делении комплексных чисел: нужно домножить числитель и знаменатель на число, сопряжённое знаменателю, чтобы знаменатель стал числом действительным

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)}=\frac{ac+bd+bci-adi}{c^2+d^2}=$$

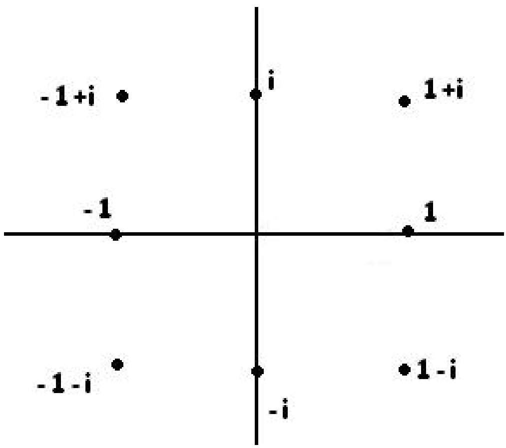
$$\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Пример. Выполнить деление $z=\frac{2-3i}{1+4i}$.

Решение. $z=\frac{2-3i}{1+4i}=\frac{2-3i}{1+4i}\cdot\frac{1-4i}{1-4i}=\frac{2-12-3i-4i}{1^2+4^2}=\frac{-10-7i}{17}$

Ответ: $z=-\frac{10}{17}-\frac{7}{17}i$

Запомните полезную схему расположения точек на плоскости в зависимости от знака действительной и мнимой части. Она пригодится при изучении тригонометрической формы комплексного числа, чтобы правильно определять, в какой четверти находится та или иная точка.



Вычисление корней через дискриминант с помощью комплексных чисел можно проводить по известным для действительных чисел формулам, только надо учитывать, что D<0, поэтому при вычислении квадратного корня из дискриминанта появится мнимая единица.

Пример. Решить уравнение $x^2 + 2x + 2 = 0$.

Решение. Находим $D = b^2 - 4ac = 4 - 8 = -4$. Таким образом, корни:

$$\frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4}\sqrt{-1}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i .$$

Если подставить решение в исходное выражение и вычислить по правилам действий с комплексными числами, то можно проверить, что это и есть корни,

$$(-1+i)(-1+i) + 2(-1+i) + 2 = (1-i-i-1) - 2 + 2i + 2 = 0$$

$$(-1-i)(-1-i) + 2(-1-i) + 2 = (1+i+i-1) - 2 - 2i + 2 = 0$$

Из формул нахождения корня через дискриминант, следует, что если z является корнем уравнения, то и сопряжённое к нему число - тоже является корнем этого уравнения.

Пример. Найти корни уравнения $x^2 + 4x + 20 = 0$.

Решение. Находим $D = b^2 - 4ac = 16 - 80 = -64$

Таким образом, корни:

$$\frac{-4 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}\sqrt{-1}}{2} = \frac{-4 \pm 8i}{2} = -2 \pm 4i .$$

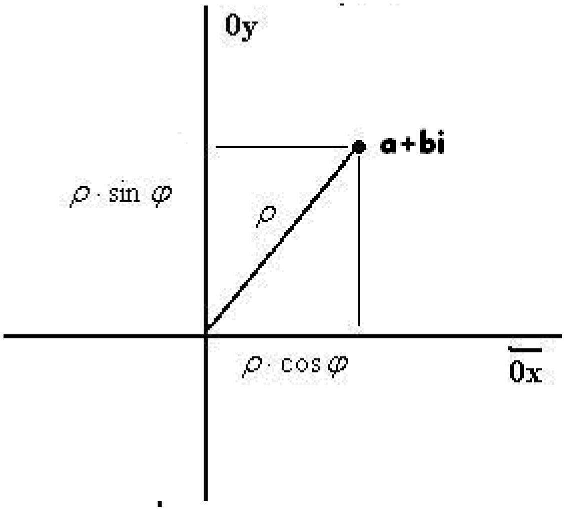
§ 2. Умножение на комплексное число и сравнение с действием линейного оператора в плоскости

Рассмотрим умножение произвольного комплексного числа на фиксированное комплексное число $(a+bi)\cdot(x+yi)$ = $(ax-by)+(ay+bx)i$.

Если поочерёдно рассмотреть координаты, то их преобразование эквивалентно линейному отображению в плоскости:

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} ax-by \\ bx+ay \end{pmatrix}$, что равносильно умножению $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, таким образом, умножение на комплексное число $a+bi$ изменяет положение точек в комплексной плоскости в точности так же, как линейный оператор, имеющий матрицу $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Введём величину $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ тогда a,b можно представить в таком виде: $a=\rho\cos\varphi$, $b=\rho\sin\varphi$ для некоторого φ, ведь геометрически в этом случае a,b - катеты прямоугольного треугольника, $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$ - его гипотенуза.



Абсцисса и ордината точки a, b это длины проекций на две оси, они равны $\rho \cdot \cos\varphi$ и $\rho \cdot \sin\varphi$ соответственно. Кстати, эти величины ρ и φ называются полярными координатами точки на плоскости. Итак, действие «умножение на фиксированное комплексное число» соответствует линейному оператору, задающему в плоскости растяжение пропорционально коэффициенту ρ одновременно с поворотом на угол φ:

$$\rho\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

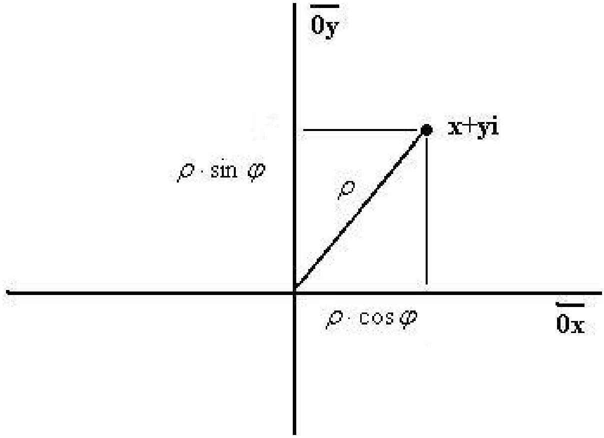
В частности, умножение на i соответствует линейному оператору с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, то есть оператору поворота на 90 градусов против часовой стрелки.

§ 3. Тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа

Если записать комплексное число $x+iy$ с помощью введённых выше величин ρ и φ, получим:

$$x+iy=\rho\cdot\cos\varphi+i\cdot\rho\cdot\sin\varphi = \rho(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi).$$

Выражение $z=\rho(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$ называется тригонометрической формой комплексного числа, φ - его аргументом, ρ - модулем. Понятие модуля не противоречит известному понятию, применявшемуся раньше для отрицательных чисел: и там, и здесь модуль - есть расстояние по кратчайшей линии до начала координат.



Для любой точки $x+iy$ модуль вычисляется как $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.

Для вычисления аргумента верна формула $\varphi=arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)$ если точка в 4-й и 1-й четверти, либо $\varphi=\pi+arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)$, если во 2-й и

3-й четверти. Это связано с тем, что период тангенса равен π, график этой функции непрерывен на интервале от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$.

Примечание. Угол может определяться разными способами, так, например, вместо угла $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ во всех вычислениях для комплексных чисел в тригонометрической форме можно использовать $\varphi = -\frac{5\pi}{4}$, и это не будет ошибкой, так как тригонометрические функции повторяются через промежуток 2π.

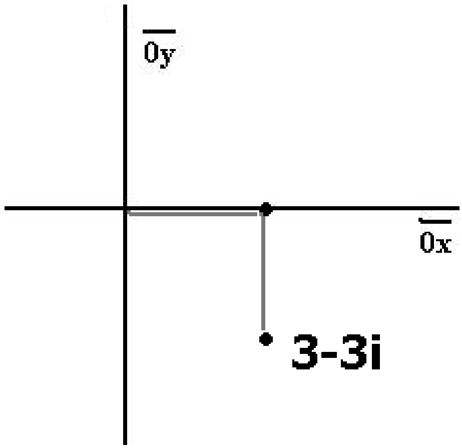
Показательная форма комплексного числа.

Известна формула Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, таким образом, выражение $z = \rho(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$ может быть записано в виде $z = \rho e^{i\varphi}$.

Так, например, мнимой единице соответствует аргумент $\frac{\pi}{2}$ и модуль 1, поэтому запись в тригонометрической и показательной формах такова:

$$i = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \quad \text{и} \quad i = 1e^{i\pi/2}.$$

Пример. Запишите число $z = 3 - 3i$ в тригонометрической и показательной формах.



В таких задачах желательно выполнять чертёж. Если без чертежа пытаться в уме определить, в какой четверти расположена точка, это, как правило, приводит к ложным результатам. Здесь первая координата x положительна, вторая координата y отрицательна, то есть от начала координат к данной точке нужно двигаться вправо и вниз, т.е. точка расположена в четвёртой четверти.

Вычислим модуль и аргумент данного числа. $\rho = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$.

$\varphi = arctg\left(\dfrac{y}{x}\right) = arctg\left(\dfrac{-3}{3}\right) = arctg(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$. Впрочем, также будет верно принять $\varphi = \dfrac{7\pi}{4}$, что отличается на полный оборот 2π.

Тригонометрическая форма:

$$\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Показательная форма: $z = \rho e^{i\varphi} = 3\sqrt{2}e^{-\frac{\pi i}{4}}$.

§ 4. Умножение и деление в тригонометрической и показательной форме

Умножение, и особенно деление комплексных чисел чаще всего бывает легче выполнять в тригонометрической форме, чем в алгебраической, так как для деления не нужно домножать на сопряжённое в знаменателе.

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Доказательство формулы :

$$z_1 z_2 = \rho_1 (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)\ \rho_2 (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2) =$$

$$\rho_1 \rho_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + i \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + i \sin\varphi_1 \cos\varphi_2) =$$

$$\rho_1 \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Здесь были использованы известные тригонометрические формулы косинуса суммы и синуса суммы.

Таким образом, для умножения двух комплексных чисел, представленных в тригонометрической форме, достаточно просто умножить их модули и сложить аргументы.

Формула деления двух комплексных чисел в тригонометрической форме:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) .$$

Для деления двух комплексных чисел, представленных в тригонометрической форме, нужно поделить их модули и вычесть аргументы.

Однако ещё проще умножать и делить числа в показательной форме.

$$z_1 z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_2+\varphi_1)}$$ и

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i\varphi_1} e^{-i\varphi_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_2-\varphi_1)}$$

так как при умножении показательных функций, их степени складываются, а при делении вычитаются.

Пример. Разделить $\frac{-2+2i}{1+i}$ тремя способами:

1) с помощью умножения на сопряжённое число.

2) в тригонометрической форме.

3) в показательной форме.

1) $\frac{-2+2i}{1+i} = \frac{(-2+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{4i}{2} = 2i$.

2) Заранее находим модуль и аргумент каждого числа и представляем их в тригонометрической форме.

$$-2+2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right),\ 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Тогда деление имеет вид:

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i$$

3) $$\frac{-2+2i}{1+i} = \frac{2\sqrt{2}\cdot e^{i3\pi/4}}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = 2\cdot e^{i\left(3\pi/4-\pi/4\right)} = 2\cdot e^{\pi i/2} =$$

$$2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i$$

§ 5. Степень и корень. Формула Муавра. Формула извлечения корня

Если в предыдущем параграфе мы умножали бы в тригонометрической форме не два разных числа, а одно и то же число $z = \rho(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$, то получилось бы: $\rho\rho(\cos(\varphi+\varphi) + i\sin(\varphi+\varphi))$, то есть $z^2 = \rho^2(\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi))$.

Таким же образом можно умножить z в третий раз и снова в аргументе прибавится φ, а модуль снова умножится на ρ. Таким образом, по индукции доказывается, что

$$z^n = \rho^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

Эта формула называется формулой Муавра и позволяет не перемножать множество скобок, если требуется вычислить большую степень числа, а вычислить её по формуле.

И снова можно сказать, что ещё легче возводить в степень с помощью показательной формы числа:

$$z^n = \left(\rho e^{i\varphi}\right)^n = \rho^n e^{in\varphi}$$

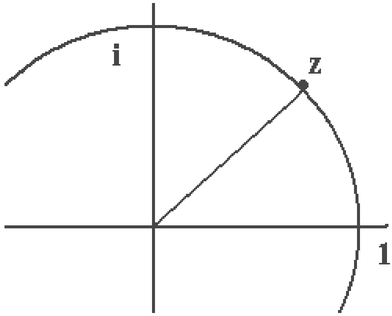
Пример. Найти $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right)^{20}$.

Вычислим модуль и аргумент.

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

$$\varphi = arctg\left(\frac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}}\right) = arctg 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, соответствующая точка расположена в первой четверти на пересечении биссектрисы угла и единичной окружности.



По формуле Муавра, $1^{20}\left(\cos\left(20\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(20\frac{\pi}{4}\right)\right)=$

$1(\cos 5\pi + i\sin 5\pi)$ но мы всегда при вычислении синуса и косинуса можем отбрасывать углы, кратные 2π , то есть $2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$ поэтому получаем $1(\cos\pi + i\sin\pi)$ $= -1+0i = -1$.

В показательной форме: $\left(1\cdot e^{i\pi/4}\right)^{20} = 1^{20}\cdot e^{20i\pi/4} = 1\cdot e^{5i\pi} =$

$\cos 5\pi + i\sin 5\pi$ $= \cos\pi + i\sin\pi = -1$.

Пример. Найдите все значения корня $\sqrt[3]{8i}$.

Сначала представим комплексное число, которое находится под знаком корня, в тригонометрической форме. Точка расположена на мнимой оси выше начала координат, поэтому аргумент $\varphi = \frac{\pi}{2}$, модуль $\rho = |8i| = 8$.

Теперь находим все 3 корня.

$$\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right)$$ при k = 0,1,2.

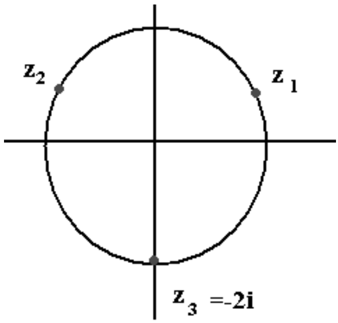
$2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k\right)\right)$, отсюда:

1) $z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3} + i$

2) $z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = -\sqrt{3} + i$

3) $z_3 = 2\left(\cos\left(\frac{9\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{6}\right)\right) = -2i$

Чертёж:



Пример. Найти все значения $\sqrt[4]{1}$.

Решение. Исходное число 1 может быть записано в виде $1(\cos 0 + i\sin 0)$. Таким образом,

$$\sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{2\pi k}{4} + i\sin\frac{2\pi k}{4}\right) = 1\left(\cos\frac{\pi k}{2} + i\sin\frac{\pi k}{2}\right)$$

Получаем следующие значения при $k = 0,1,2,3$:

1) $1(\cos 0 + i\sin 0) = 1$

2) $1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = i$

3) $1(\cos\pi + i\sin\pi) = -1$

4) $1\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -i$

§ 6. Логарифм комплексного числа. Задачи на вычисление логарифма

Формула для вычисления логарифма произвольного комплексного числа: $Ln(z) = \ln\rho + i(\varphi + 2\pi k)$.

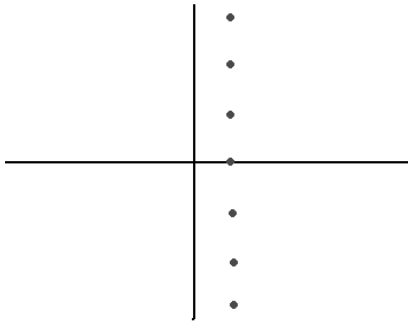
Докажем эту формулу:

$$e^{Ln(z)} = e^{\ln\rho + i(\varphi + 2\pi k)} \Rightarrow z = \rho e^{i(\varphi + 2\pi k)}$$

$z = \rho(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k))$, что означает $z = \rho(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ так как синус и косинус не зависят от прибавления угла, кратного 2π . А это равенство уже очевидно, так как это и есть тригонометрическая форма комплексного числа.

Из формулы видно, что только при нулевом аргументе исходного числа одно из значений логарифма попадает на действительную ось. А это соответствует правой полуоси, и именно поэтому в курсе школьной математики рассматривали только логарифмы положительных чисел. Логарифмы отрицательных и мнимых чисел также существуют, но у них нет ни одного значения на действительной оси.

На следующем чертеже показано, где в плоскости расположены все значения логарифма положительного числа. Одно из них на действительной оси, остальные выше и ниже на 2π , 4π , 6π и так далее. Для отрицательного или комплексного числа, аргумент φ отличен от нуля, поэтому происходит сдвиг этой последовательности точек по вертикали, в результате чего на действительной оси не будет ни одной точки.



Пример. Вычислить $Ln(-1)$.

По формуле, $Ln(z)=\ln\rho+i(\varphi+2\pi k)$,таким образом

$$Ln(-1)=\ln 1+i(\pi+2\pi k)=\ 0+i(\pi+2\pi k)$$

Пример. Вычислить $Ln(i)$**.**

По формуле, $Ln(z)=\ln\rho+i(\varphi+2\pi k)$,таким образом

$$Ln(i)=\ln 1+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)=\ 0+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$$

Существуют и обратные задачи на вычисление z, если дан $Ln(z)$:

Пример. По данному значению $Ln\,z$ запишите z в алгебраической форме в виде $a+bi$ (нулевые значения опускайте). $Ln\,z=\ln\sqrt{52}+\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+2m\pi\right)i$.

Поскольку значение логарифма уже дано, то для того, чтобы найти z, нужно найти экспоненту от данного выражения по формуле Эйлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$.

$$e^{\ln\sqrt{52}+\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+2m\pi\right)i}=e^{\ln\sqrt{52}}\cdot e^{\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+2m\pi\right)i}=$$

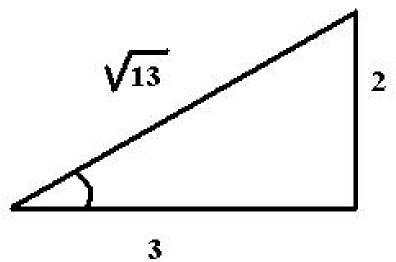
$$\sqrt{52}\cdot e^{\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+2m\pi\right)i}=$$

$$\sqrt{52}\cdot\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\tfrac{2}{3}+2m\pi\right)+i\sin\left(\operatorname{arctg}\tfrac{2}{3}+2m\pi\right)\right)$$

Для нахождения $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+2m\pi\right)$ и $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+2m\pi\right)$ можно воспользоваться известными тригонометрическими формулами, либо если под рукой нет этих формул, то очень легко вычислить их с помощью треугольника таким образом: строим прямоугольный треугольник, отмечаем два катета с длинами 2 и 3. Ведь нам нужно найти синус и косинус именно того угла, тангенс которого равен 2/3.

После этого по теореме Пифагора вычислим третью сторону, а именно $\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$. Тогда по определению sin и cos очевидно, что синус данного угла есть $\frac{2}{\sqrt{13}}$, косинус $\frac{3}{\sqrt{13}}$.

Чертёж:



Далее, значения синуса и косинуса не зависят от $2m\pi$, так как $2m\pi$ кратно 360^0.

Итак, получим $\sqrt{52}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{13}}+i\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$ = $\sqrt{\frac{52}{13}}(2+3i)=4+6i$.

§ 7. Отображения (функции) и их графическое представление

Для построения графика отображения из плоскости в плоскость понадобилось бы их декартово произведение - четырёхмерное пространство. Поэтому для комплексных функций строят схемы, показывающие искажение линий при отображении плоскости в плоскость. Это не является графиком в полном значении этого слова, однако даёт представление о том, как деформируется исходная плоскость при отображении.

Например, изобразим деформации при отображении $w = z^2$. Для того, чтобы узнать, как деформируются при этом отображении горизонтальные прямые, сначала вычислим $(x+iy)(x+iy) = (x^2 - y^2) + i(2xy)$.

Таким образом, для отображения из плоскости в плоскость верно задание $\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$.

График функции $R^2 \to R^2$ (в обычном смысле понятия графика) был бы в 4-мерном пространстве, и построить его в нашем пространстве невозможно. Для того, чтобы хотя бы графически представить, как отображается плоскость в плоскость, можно рассмотреть, куда переходят горизонтальные и вертикальные прямые линии. Если в исходной плоскости фиксировать x или y, то получим уже зависимость не от двух, а от одной переменной, то есть в плоскости (u,v) образ прямой можно получить как кривую, представленную параметрически.

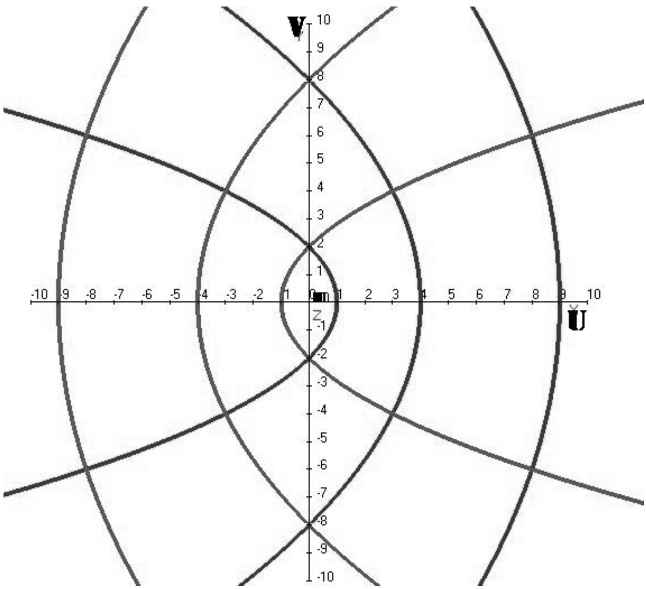
Пусть $y = C$. Тогда $\{u = x^2 - C^2, v = 2Cx\}$, но мы для того, чтобы изобразить линию, хотим выразить явно одну переменную через другую в плоскости (u,v), для этого из 2-го уравнения выражаем x через v и подставляем в первое. Получаем

$u = \left(\dfrac{v}{2C} \right)^2 - C^2$. Это парабола, ветвями направленная вправо, причём с ростом модуля параметра C её вершина сдвигается влево, а график становится более пологим. То есть, образ горизонтальной прямой есть парабола, ветвями направленная вправо.

При C = 0 достигается предельное положение параболы: вершина в точке (0,0) и ветви смыкаются, то есть эта кривая совпадает с положительной полуосью.

Аналогично при фиксировании координаты $x = C$, получаются похожие уравнения: $\{u = C^2 - y^2, v = 2Cy\}$, выражая одно через другое получаем $u = C^2 - \left(\dfrac{u}{2C} \right)^2$. Это парабола, направленная ветвями влево, вершина которой также зависит от C.

Чертёж:



Часто встречаются задачи, где требуется разбить комплексную функцию на две составляющие части, то есть представить её в виде

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Для их решения нужно z представить в исходном выражении $x + iy$ и выполнить преобразования, так чтобы отделить слагаемые, содержащие мнимую единицу, и не содержащие её.

Пример. Вычислить функции $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ для заданной $f(z) = z^3$.

Решение.

$z^2 = (x + iy)(x + iy) = x^2 + i^2 y^2 + i2xy = (x^2 - y^2) + i(2xy)$,

$z^3 = z^2 z = ((x^2 - y^2) + i(2xy))(x + iy) =$
$(x^3 - xy^2) + i^2 2xy^2 + i2x^2 y + i(x^2 y - y^3) =$

$(x^3 - 3xy^2) + i(3x^2 y - y^3)$,

Ответ: $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$, $v(x, y) = 3x^2 y - y^3$.

§ 8. Дифференцируемость и аналитичность. Восстановление аналитической функции по её действительной или мнимой части

Оказывается, что действительная и мнимая части комплексной функции настолько взаимосвязаны, что каждая из них полностью содержит информацию обо всей функции. Для дифференцируемой функции выполняются условия Коши-Римана (см. [1]):

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$$

Функция называется аналитической в точке, если она является дифференцируемой в точке и некоторой её окрестности. Таким образом, для функции, аналитической в области, условия Коши-Римана выполнены во всех точках этой области.

Из условий Коши-Римана следует, что для каждой из этих двух функций выполняется уравнение Лапласа, то есть

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

В связи с тем, что действительная и мнимая компоненты аналитической функции комплексного переменного взаимосвязаны условиями Коши-Римана, оказывается разрешимой задача о восстановлении функции по какой-либо одной из её компонент.

Для восстановления второй компоненты аналитической функции нужно записать неизвестную компоненту в виде интеграла от её дифференциала, а затем заменить производные от неизвестной компоненты на производные от второй, известной компоненты, согласно условиям Коши-Римана. Проиллюстрируем этот метод на примере.

Пример. Может ли данная функция $u(x,y)=x^2-y^2$ быть действительной или мнимой частью аналитической функции.

Найдите эту аналитическую функцию. Дополнительное условие $v(0,0)=0$.

Решение. Сначала проверим уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

чтобы показать, что $u(x,y)$ может являться действительной частью некоторой комплексной функции. Для этого сначала вычислим первые и вторые производные.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x\,,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y\,,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\,,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2\,.$$

Очевидно, что сумма вторых производных равна 0, то есть уравнение Лапласа выполняется.

Теперь восстановим $v(x,y)$ с помощью криволинейного

интеграла $$v=\int dv=\int\limits_{(0,0)}^{(x,y)}\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy$$

в этом интеграле заменим частные производные от неизвестной нам функции $v(x,y)$ на частные производные от известной функции $u(x,y)$, это возможно сделать по условиям Коши-

Римана: $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

Итак, преобразуем интеграл: $v=\int dv=\int\limits_{(0,0)}^{(x,y)}\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=$

$$\int\limits_{(0,0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy=\int\limits_{(0,0)}^{(x,y)}2ydx+2xdy\,.$$

Вычисление получившегося криволинейного интеграла второго рода проводится методами теории поля, знакомыми из программы курса мат. анализа прошлого семестра.

$$\int_0^x P(x,0)dx + \int_0^y Q(x,y)dy = \int_0^x 0dx + \int_0^y 2xdy = 2xy\Big|_0^y = 2xy .$$

Мы здесь искали интеграл от фиксированной точки (0,0), если была бы взята другая начальная точка, то результат мог бы отличаться на константу. Потенциал векторного поля находится с точностью до константы. Поэтому общее решение следует записать в виде: $v(x,y) = 2xy + C$. Однако в данном случае сразу же легко определяется, что $C = 0$, так как $v(0,0) = 2\cdot 0\cdot 0 + C = 0$. Итак, $v(x,y) = 2xy$.

Теперь осталось преобразовать $u + iv = (x^2 - y^2) + i\cdot(2xy)$ в выражение вида $f(z)$. Для этого воспользуемся равенствами

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2},\ y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

которые легко выводятся из основных: $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ арифметическими действиями.

$$\left(\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2\right) + i\cdot 2\cdot\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\cdot\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) =$$

$$\frac{z^2+\bar{z}^2+2z\bar{z}}{4} - \frac{z^2+\bar{z}^2-2z\bar{z}}{-4} + \frac{z^2-\bar{z}^2}{2} =$$

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)z^2 + \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\bar{z}^2 + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)z\bar{z} = z^2 .$$

Итак, $f(z) = z^2$.

§ 9. Обобщения комплексных чисел. Системы гиперкомплексных чисел

При изучении комплексных чисел у студентов нередко возникает вопрос: а есть ли обобщения, т.е. числа, которые задаются в виде точек трёхмерного пространства, а не плоскости. Оказывается, что такой системы, где были бы должным образом обобщены известные арифметические операции, в трёхмерном пространстве не существует, но есть обобщение в 4-мерном пространстве - система кватернионов. Кватернионы оказали огромное влияние на математику и физику. Так, умножение мнимых единиц i,j,k породило знакомое всем векторное умножение, без которого сегодня немыслимы многие формулы в физике: от силы Кориолиса в механике до формул электродинамики. Интересно, что кватернионы были придуманы раньше, чем векторное произведение векторов. Система кватернионов была предложена Гамильтоном в 1843 году.

Метод удвоения. Комплексные числа строятся на основе действительных таким образом: к первому числу прибавляется второе, умноженное на мнимую единицу. Представим себе, что теперь два комплексных числа являются составными частями какого-то нового числа, где новая мнимая единица обозначается j. (Таким же образом, как прежде были построены комплексные числа с помощью действительных).

$$(a+bi)+(c+di)j$$

При этом придётся ввести также ещё один символ для произведения мнимых единиц: k = i j. Таким образом, получается 4-мерная система с одной действительной единицей и тремя мнимыми единицами: i, j, k.

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k, ji = -k$, $jk = i, kj = -i$, $ki = j, ik = -j$.

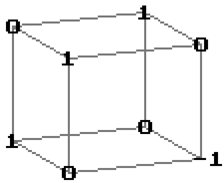
Таким образом, так называемая «таблица умножения» имеет вид:

$\times$	**1**	**i**	**j**	**k**
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Задание гиперкомплексных систем с помощью трёхмерных матриц.

Изучив тему «линейные операторы», вы уже знаете, что линейное отображение задаётся с помощью матрицы. В столбцах матрицы линейного оператора содержатся векторы $L(e_i)$. Аналогичным способом можно задавать и операцию над двумя базисными единицами, только получающаяся матрица - на одну размерность больше, то есть трёхмерная, и матрица содержит n^2 векторов, получающихся в результате умножений базисных векторов $e_i e_j$, где $i, j = 1,...,n$. Этот способ был предложен автором в студенческом возрасте и озвучивался на семинарах кафедры алгебры ТГУ в 1990-е годы, позже в 2004 г. вышла статья в журнале ([4]). Матричный метод задания гиперкомплексных систем пока не получил широкого применения: так, на международном математическом сайте wolfram умножение мнимых единиц до сих пор задаётся с помощью символьной таблицы умножения или систем равенств.

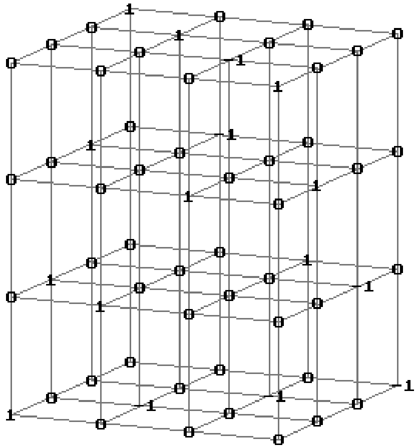
Подробнее покажем, как строится трёхмерная матрица для системы комплексных чисел. Если обозначить 1,i как обычные базисные векторы в плоскости, то есть e_1, e_2, то для равенства $i^2 = -1$ запись будет в виде $e_2 \cdot e_2 = -1e_1 + 0e_2$, аналогично $1 \cdot i = i \cdot 1 = i$ соответствует $e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = 0e_1 + 1e_2$, а $1^2 = 1$ означает $e_1 \cdot e_1 = 1e_1 + 0e_2$. В итоге из восьми координат четырёх получившихся векторов, для задания системы комплексных чисел получилась бы такая трёхмерная матрица из 8 чисел, которые называются «структурными константами» системы:



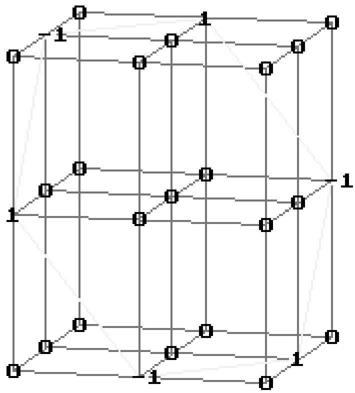
Примечание. При построении пространственных матриц обычно нумерация третьего индекса производится снизу вверх, таким образом, сечения необходимо отразить для правильной записи в виде обычных квадратных матриц.

В одном сечении вдоль вертикального направления присутствует матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, соответствующая умножению на единицу, то есть тождественному линейному оператору. Во втором сечении матрица $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, соответствующая умножению на мнимую единицу, то есть оператору поворота на 90^0.

Таким же образом может быть построена матрица, задающая систему кватернионов. Эта матрица содержит не символьную информацию, а числа.



Векторное умножение в трёхмерном пространстве также может быть задано матрицей, кстати, исторически оно появилось именно как мнимая часть системы кватернионов:



Обобщения комплексных чисел представляют интерес и используются в некоторых разделах физики и математики, однако в курсе ТФКП обычно даются лишь в ознакомительном порядке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Магазинников Л.И. Высшая математика III. Томск, 2007.

2. Соколов Н.П. Пространственные матрицы и их приложения М.: Физматлит, 1960

3. Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973.

4. Приходовский М.А. Применение многомерных матриц для исследования гиперкомплексных чисел и конечномерных алгебр // Вестник Томского государственного университета. 2004. № 284. С. 27-30.

Приходовский Михаил Анатольевич
кандидат физико-математических. наук,
доцент кафедры математики ТУСУР

Учебное издание

Комплексные и гиперкомплексные числа

Компьютерная вёрстка М.А. Приходовский

Подписано в печать 04.12.2013 г.
Формат 60х84 ^{1}/16.
Бумага офсетная № 1.
Печать ризографическая.
Печ. л. 2,0; усл. печ. л. 1,86.
Тираж 100экз. Заказ № 13863

Тираж отпечатан в типографии «Иван Фёдоров»
634026, г. Томск, ул. Розы Люксембург, 115/1
тел.: (3822)78-80-80, тел./факс: (3822)78-30-80
E-mail: mail@if.tomsk.ru