Федеральное агентство по образованию

Томский государственный университет систем
управления и радиоэлектроники

Кафедра высшей математики (ВМ)

Приходовский М.А.

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ
И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Практическое пособие и комплект задач

2006

Содержание

Разработчик: доцент кафедры ВМ

Приходовский Михаил Анатольевич

§1. Определение линейного оператора. Матрица линейного оператора.

Определение 1. Отображение L из линейного пространства R^n в линейное пространство R^m называется линейным отображением, или линейным оператором, если для любых векторов x, y из R^n и любой константы α выполняются равенства:

$$1)\ L(x+y)=L(x)+L(y)$$

$$2)\ L(\alpha x)=\alpha L(x)$$

Эти 2 равенства эквивалентны 3):

$$3)\ L(\alpha x+\beta y)=\alpha L(x)+\beta L(y)$$

Заметим, что линейный оператор отображает нулевой вектор в нулевой вектор. По свойству линейности, $L(0)=L(x-x)=L(x)-L(x)=0$.

Любая матрица размера $m\times n$ задаёт линейное отображение пространства R^n в пространство R^m. Действительно, матрицу из n столбцов можно умножить на любой вектор-столбец, состоящий из n координат, так как размеры $m\times n$ и $n\times 1$ согласованы. В частности, квадратную матрицу порядка n можно умножать на вектор-столбец, состоящий из n координат, так как размеры матриц будут n×n и n×1, и результатом будет матрица-столбец размера n×1.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Таким образом, каждая квадратная матрица задаёт преобразование, или отображение, в пространстве размерности n.

Отображения, вводимые таким образом, будут линейными, что следует из свойств умножения матриц:

$A(B+C)=AB+AC$ для любых матриц A,B,C, размеры которых согласованы и возможно их умножение, поэтому $A(x+y)=Ax+Ay$

Аналогично из свойства $A(\alpha B)=\alpha AB$ следует $A(\alpha x)=\alpha Ax$.

Если отобразить вектор $e_1 =(1,0,\ldots 0)$ то получим

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

То есть образом будет вектор, координаты которого есть элементы первого столбца в матрице, задающей отображение. Аналогично, для вектора e_i образ будет вектором, координаты которого – элементы столбца номер i рассматриваемой матрицы.

Итак, матрица задаёт линейное отображение векторов. С другой стороны, любое линейное отображение L конечномерных пространств можно задать с помощью матрицы.

Представим вектор x в виде $x=x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - координаты, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ - базисные векторы, то по свойству линейности оператора получим $L(x)=L(x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n)$

$$= L(x_1 e_1) + L(x_2 e_2) + ... + L(x_n e_n)$$

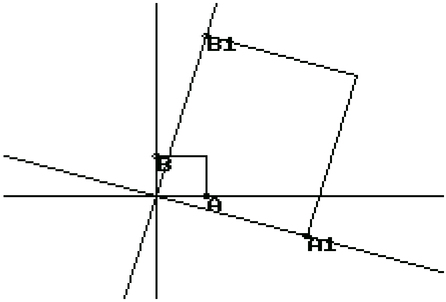
$$= x_1 L(e_1) + x_2 L(e_2) + ... + x_n L(e_n),$$

откуда видно, что образ вектора зависит лишь от координат этого самого вектора и от того, куда отображаются оператором n базисных векторов пространства, то есть зависит от векторов $L(e_1), L(e_2),..., L(e_n)$. Матрица, составленная из этих векторов (по столбцам), является матрицей линейного оператора.

Замечание. Для сравнения рассмотрим линейный оператор, отображающий векторы в пространстве R^1. Этот оператор – знакомое ещё из школы линейное отображение вида $y = kx$. Причём коэффициент k может рассматриваться в качестве матрицы оператора (матрица порядка 1), x – вектор в пространстве R^1. Задать линейное отображение $y = kx$ на элементе x = 1 достаточно, чтобы знать образ любого числа x при таком отображении. Фактически, здесь число k играет роль и матрицы размеров 1×1, и образа единицы: $y = k \cdot 1$.

1.2 Графическое представление линейного оператора.

Для наглядного представления о том, как действует линейное отображение, построим образы горизонтальных и вертикальных прямых до и после действия отображения.



На рис.1 наклонные прямые – образы координатных осей при действии линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Единичный квадрат, сторонами которого являются векторы (1,0) и (0,1) отображается в параллелограмм со сторонами (3,-1) и (1,4). Точка A переходит в A_1, точка B – в B_1.

Пусть матрица оператора $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Фиксируем горизонтальную прямую на уровне *y = C.* Рассмотрим образы точек вида *(t, C)*.

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}t + a_{12}C \\ a_{21}t + a_{22}C \end{pmatrix}$. Итак, линейный оператор отображает горизонтальную прямую в прямую, параметрические уравнения которой:

$\begin{cases} x = a_{11}t + a_{12}C \\ y = a_{21}t + a_{22}C \end{cases}$. Отсюда можно найти и явное уравнение прямой, для этого выразить t из первого уравнения прямой и подставить во второе.

$y = a_{22}C + a_{21}\dfrac{x - Ca_{12}}{a_{11}} = \dfrac{a_{21}}{a_{11}}x + C\left(a_{22} - \dfrac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}\right)$. Ось абсцисс при этом переходит в прямую $y = \dfrac{a_{21}}{a_{11}}x$, а горизонтальные прямые – отображаются в прямые, параллельные данной.

§2. Построение матрицы линейного оператора.

2.1. Построение матрицы по заданной формуле отображения.

Пусть отображение задано с помощью формулы

$$L : (x_1, ..., x_n) \to (a_{11}x_1 + ... + a_{n1}x_n, ..., a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n)$$

то есть для координат произвольного исходного вектора определены координаты его образа. Тогда, рассматривая вместо произвольного вектора x вектор $e_1 = (1,0,...0)$, найдём его образ, это будет вектор $(a_{11}, ..., a_{n1})$. Для этого в формуле, задающей образ вектора, полагаем $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, …, $x_n = 0$. Аналогично находим образы для $e_2 = (0,1,...0)$, …, $e_n = (0,...0,1)$. Из координат образа вектора e_1 составляем 1-й столбец матрицы линейного оператора, аналогично из координат последующих векторов – остальные столбцы. Рассмотрим на примере.

Пример 1. Пусть оператор задан с помощью формулы:

$L : (x_1, x_2) \to (3x_1 + 2x_2, x_1 - x_2)$.

Прежде всего, докажем, что это отображение – действительно л**инейный** оператор. Отобразим сумму векторов:

$$L:(x_1+y_1, x_2+y_2) \to (3(x_1+y_1)+2(x_2+y_2), (x_1+y_1)-(x_2+y_2))$$

Теперь каждую координату получившегося вектора можем преобразовать:

$$(3(x_1+y_1)+2(x_2+y_2), (x_1+y_1)-(x_2+y_2)) =$$

$$(3x_1+3y_1+2x_2+2y_2, x_1+y_1-x_2-y_2) =$$

$$(3x_1+2x_2, x_1-x_2)+(3y_1+2y_2, y_1-y_2) = L(x_1,x_2)+L(y_1,y_2).$$

Аналогично для умножения на константу:

$$L:(\alpha x_1, \alpha x_2) \to (3\alpha x_1+2\alpha x_2, \alpha x_1-\alpha x_2) =$$

$$\alpha(3x_1+2x_2, x_1-x_2) = \alpha L(x_1,x_2)$$

Для того чтобы найти матрицу этого линейного оператора, нужно, как было сказано выше, подставить значения $x_1=1$, $x_2=0$, а затем $x_1=0$, $x_2=1$. В этом примере образы базисных векторов – соответственно (3, 1) и (2, -1). Поэтому матрица линейного оператора будет иметь вид:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Аналогичным способом решается задача и для 3 и большего количества переменных.

Пример 2. $L:(x_1,x_2,x_3) \to (x_1+2x_2-x_3, 4x_1+x_2, -x_1-2x_2+3x_3)$.

Построим матрицу оператора. Отображая вектор (1,0,0), получаем (1,4,-1), соответственно (0,1,0) переходит в (2,1,-2), а вектор (0,0,1) – в (-1,1,3). Матрица линейного оператора:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.2. Построение матрицы оператора в случае, когда известен исходный базис и система векторов, в которую он отображается.

Если задана система $c_1, c_2, \ldots, c_n$ из n векторов, образующих базис, и какая-нибудь произвольная система n векторов $b_1, b_2, \ldots, b_n$ (возможно, линейно-зависимая), то однозначно определён линейный оператор, отображающий каждый вектор первой системы в соответствующий вектор второй системы.

Матрицу этого оператора можно найти двумя способами: с помощью обратной матрицы и с помощью системы уравнений.

Пусть A - матрица оператора в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. По условию, $Ac_i = b_i$ для всех индексов $i = 1, \ldots, n$. Данные n равенств можно записать в виде одного матричного равенства: $AC = B$, при этом столбцы матрицы B - это векторы $b_1, b_2, \ldots, b_n$, а столбцы матрицы C - векторы $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Тогда матрица A может быть найдена в виде $A = BC^{-1}$.

Пример. Найти матрицу линейного оператора, отображающего базис $c_1 = (2,3), c_2 = (1,1)$ в систему векторов $b_1 = (1,2), b_2 = (-1,1)$.

Здесь $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, и получаем:

$$A = BC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверка осуществляется умножением получившейся матрицы на каждый вектор: $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Аналогично решаются подобные задачи и для трёхмерного пространства. В приложении (§5) есть несколько вариантов таких задач.

2.3. Прочие способы нахождения матрицы оператора.

Существуют также примеры, где линейный оператор задаётся другими способами, отличными от рассмотренных в п. 2.1 и 2.2.

Пример. Линейными операторами являются как правое, так и левое векторное умножение на фиксированный вектор в трёхмерном пространстве, то есть отображения вида $L(x)=[a,x]$ и $L(x)=[x,a]$. Построим матрицу одного из этих операторов, $L(x)=[a,x]$.Для этого найдём образы всех трёх базисных векторов линейного пространства.

$$L(e_1)=[a,e_1]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0i+a_3 j-a_2 k .$$

Аналогично, $L(e_2)=[a,e_2]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-a_3 i+0j+a_1 k$,

$$L(e_3)=[a,e_3]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=a_2 i-a_1 j+0k .$$

Координаты полученных векторов запишем в виде столбцов матрицы оператора.

Матрица оператора: $A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$.

Аналогично можно построить матрицу линейного оператора $L(x) = [x, a]$
:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример. Линейный оператор дифференцирования в пространстве всех многочленов степени не более n. Это пространство размерности n+1. Возьмём в качестве базиса элементы $f_1 = 1$, $f_2 = x$, $f_3 = x^2$,..., $f_{n+1} = x^n$.

$L(f_1) = 0$, $L(f_2) = (x)' = 1 = f_1$, $L(f_3) = (x^2)' = 2x = 2f_2$, аналогично получим $L(f_4) = (x^3)' = 3x^2 = 3f_3$,..., $L(f_{n+1}) = (x^n)' = nx^{n-1} = nf_n$.

Матрица этого линейного оператора:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Линейные операторы могут отображать не только пространства конечной размерности, но и бесконечномерные пространства. Так, оператор дифференцирования может рассматриваться также в пространстве всех непрерывных функций. (В этом пространстве нет конечного базиса). В этом случае, очевидно, оператор не может быть задан матрицей конечного порядка.

2.4. Сумма, произведение линейных операторов.

Для любых двух линейных операторов $L_1, L_2 : R^n \to R^m$ определён оператор L, называемый **суммой** данных двух операторов. Действие оператора L на любой вектор пространства R^n определяется так: $L(x) = L_1(x) + L_2(x)$.

Пример. Сумма линейных операторов $L(x) = [a, x]$ и $L(x) = [x, a]$ - нулевой оператор.

Для всякого линейного оператора L определён оператор αL, называемый произведением L на число α. Действие этого оператора задаётся с помощью формулы $(\alpha L)(x) = \alpha \cdot L(x)$.

Для линейных операторов $L_1 : R^n \to R^m$, $L_2 : R^m \to R^s$, определён оператор, называемый композицией двух исходных операторов и обозначаемый $L_2 \circ L_1$. Композиция определяется таким образом: $(L_2 \circ L_1)(x) = L_2(L_1(x))$.

§3. Нахождение собственных чисел и собственных векторов

Определение. Ненулевой вектор x называется собственным вектором линейного оператора $L: R^n \to R^n$, соответствующим собственному числу λ, если выполнено равенство $Lx = \lambda x$.

Замечание. Если рассматривать нулевой вектор, то он был бы собственным для любого числа λ, потому что $L0 = 0 = \lambda 0$. Таким образом, в определении вектор 0 исключается из рассмотрения, однако 0-вектор включается в *собственное подпространство* (п.3.3.).

Определение. Пусть A - матрица линейного оператора L. Матрица $\lambda E - A$ называется характеристической матрицей линейного оператора, уравнение $|\lambda E - A| = 0$ - характеристическим уравнением, а его корни – характеристическим корнями линейного оператора.

Докажем, что любое собственное число является характеристическим корнем. Пусть λ - собственное число, то есть для некоторого вектора x выполняется $Lx = \lambda x$. Запишем это равенство подробнее:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Умножаем матрицу на вектор, и затем в получившейся системе уравнений переносим все слагаемые в правую часть. Получается однородная система уравнений, которую можно записать в виде:

$$
\begin{array}{llll}
(\lambda - a_{11})x_1 & -a_{12}x_2 & \ldots -a_{1n}x_n & =0 \\
-a_{21}x_1 & +(\lambda - a_{22})x_2 & \ldots -a_{2n}x_n & =0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-a_{n1}x_1 & -a_{22}x_2 & \ldots +(\lambda - a_{nn})x_n & =0
\end{array}
$$

Основная матрица этой системы – матрица $\lambda E - A$. Для однородной системы существует нетривиальное решение тогда и только тогда, когда её матрица вырождена, таким образом, $|\lambda E - A| = 0$, то есть, если x - собственный вектор, то число λ является характеристическим корнем.

Алгоритм нахождения собственных чисел и собственных векторов.

1) Найти корни характеристического уравнения $|\lambda E - A| = 0$.

Замечание. Можно также найти корни уравнения $|A - \lambda E| = 0$, но в этом случае при нечётном порядке матрицы, коэффициент при λ^n будет отрицательный.

2) Для каждого найденного характеристического корня решить однородную систему $(\lambda E - A)x = 0$ и найти её фундаментальную систему решений (это и будут собственные векторы, соответствующие данному числу λ). При изучении линейной алгебры наиболее часто рассматривают собственные числа и векторы для операторов в R^3. В этом случае характеристическое уравнение будет третьей степени. Можно найти 3 корня с помощью теоремы Виета, либо найти их поочерёдно следующим способом. Допустим, нам известен один характеристический корень λ_1, тогда можем поделить характеристический многочлен на $(\lambda - \lambda_1)$, причём деление будет без

остатка, так как λ_1 - корень многочлена. Частное – многочлен степени 2, в свою очередь его 2 корня легко могут быть найдены через дискриминант. Для нахождения какого-либо одного корня уравнения третьего порядка можно применять следующее утверждение из общей алгебры:

Если число $\frac{p}{q}$ – рациональный корень многочлена с целыми коэффициентами $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, то коэффициент a_n делится на q, a_0 делится на p.

Доказательство. Если $\frac{p}{q}$ - корень, то $a_n \frac{p^n}{q^n} + \ldots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$, умножим равенство на q^n: получаем $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$, следовательно, $a_n p^n = -(a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n)$. Правая часть этого равенства делится на q, поэтому левая часть тоже делится на q, то есть $\frac{a_n p^n}{q}$ – целое число, но так как p и q взаимно простые числа, то a_n делится на q. Аналогично, $a_0 q^n$ делится на p, так как $a_0 q^n = -(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + a_1 p q^{n-1})$, откуда следует что a_0 делится на p.

Таким образом, можно легко установить конечное множество возможных рациональных, в том числе целых, корней многочлена, и найти все корни, проводя проверку чисел из этого множества.

3.1. Все характеристические корни действительны и различны.

Пример 1. Найти все собственные числа и собственные векторы для линейного оператора с матрицей *A*:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & -4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдём характеристическое уравнение.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -4 & 4 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ -1 & 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 \\ 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & \lambda-3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0.$$

$a_2 = -6, a_1 = 11, a_0 = -6$. Число –6 делится без остатка на 1,2,3 и 6.Тогда р может принимать значения 1,2,3, 6. q = +1 или –1. Поэтому среди рациональных чисел корни могут быть только +1,-1,+2,-2,+3, -3, 6,-6. Находим 3 характеристических корня: 1,2 и 3. Далее, решаем однородную систему уравнений $(\lambda E - A)x = 0$ для каждого из трёх собственных чисел.

1) $\lambda = 1$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x_1 & -4x_2 & +4x_3 & =0 \\ -x_1 & +2x_2 & -3x_3 & =0 \end{matrix}\right\}$$

(ранг системы равен 2, рассматриваем 1-е и 3-е уравнения). Первый и второй столбцы не образуют базисный минор, поэтому x_3 не может быть свободной переменной. Пусть свободной переменной будет x_2, и далее, решая систему, получаем фундаментальную систему решений: вектор $a_1=(2,\quad 1,\quad 0)$.

Проверка: умножаем матрицу оператора на этот вектор и видим, что он действительно является собственным и соответствует $\lambda=1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2) $\lambda=2$.

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow \left.\begin{matrix} 3x_1 & -4x_2 & +4x_3 & =0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & =0 \end{matrix}\right\}$$

Здесь фундаментальная система решений – вектор $a_2=(0,\quad 1,\quad 1)$.

Проверка: $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

3) $\lambda=3$.

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 4x_1 & -4x_2 & +4x_3 & =0 \\ x_1 & & +x_3 & =0 \end{matrix}\right\}$$

здесь фундаментальной системой решений будет $a_3 = (-1, \quad 0, \quad 1)$.

Проверка: $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3.2 Все характеристические корни действительны, но среди них есть кратные.

3.2.1. Количество линейно-независимых собственных векторов для кратного корня совпадает с его кратностью.

Пример. Найти собственные числа и собственные векторы для линейного оператора, заданного матрицей:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -8 & -3 & -4 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-5 & -2 & -2 \\ 8 & \lambda+3 & 4 \\ -4 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda - 3 = 0 .$$

Число 1 является корнем данного многочлена, затем делим на $(\lambda-1)$ и находим ещё два корня. Итак, собственными числами будут 1, 1 и 3. Корень 1 имеет кратность 2. При его подстановке вместо λ, получим матрицу ранга 1, то есть все 3 строки оказываются линейно зависимыми. Тогда фундаментальная система решений состоит из двух векторов.

1) $\lambda = 1$.

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 8 & 4 & 4 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0$$, свободные

переменные x_2, x_3, фундаментальная система решений:

$a_1 = (-2, \quad 1, \quad 0)$, $a_2 = (-2, \quad 0, \quad 1)$

1) $\lambda = 3$.

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 8 & 6 & 4 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases},$$

фундаментальная система решений:

$a_3 = (1, \quad -2, \quad 1)$.

Проверку можно провести аналогично предыдущему примеру.

3.2.2. Количество собственных векторов не совпадает с кратностью корня.

Количество линейно-независимых собственных векторов, соответствующих характеристическому корню λ, определяется количеством свободных неизвестных в системе однородных уравнений $(\lambda E - A)\bar{x} = \bar{0}$ и может быть меньше, чем кратность характеристического корня. Так происходит, если для корня кратности k ранг матрицы $\lambda E - A$ понижается на число, меньшее, чем k, при подстановке данного λ. Рассмотрим простой пример, иллюстрирующий эту ситуацию.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 = 0$, характеристический корень равен 1, его кратность равна двум. Однако для этого линейного оператора не существует линейно-независимой системы из двух собственных векторов на плоскости. Решаем однородную систему, получающуюся при подстановке значения $\lambda = 1$.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Второе уравнение будет тождеством 0 = 0, первое уравнение: $-y = 0$, при этом x – свободная неизвестная, отсюда следует, что собственным вектором будет вектор (1,0). Базисный минор в этом примере - первого порядка, то есть, несмотря на то что корень кратности 2, ранг матрицы при подстановке характеристического корня понижается на единицу. Поэтому в системе одна свободная переменная, и один собственный вектор.

3.2.3. Не все характеристические корни действительны.

Для действительных корней собственные векторы находятся рассмотренными ранее способами. Однако собственных векторов будет меньше чем n. Если характеристический многочлен – чётной степени, и для него нет ни одного действительного корня, то собственные векторы отсутствуют. Так, например, для оператора поворота на угол α, задаваемого матрицей:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

нет ни одного собственного вектора, кроме тех случаев, когда угол поворота 0^0 или 180^0.

Если линейное пространство нечётной размерности, то всегда существует хотя бы один собственный вектор. Так как для линейного оператора в пространстве нечётной размерности характеристический многочлен будет нечётной степени, то для него обязательно существует хотя бы один корень. Отсюда следует, что существует собственный вектор.

В частности, именно этим фактом объясняется, что при вращении сферы (в трёхмерном пространстве, нечётной размерности) обязательно есть ось (прямая, переходящая в себя при повороте на любой угол) и 2 полюса (точки на поверхности, остающиеся неподвижными). А при вращении круга (на плоскости, то есть в двумерном пространстве, размерность - чётная) ни одна точка, кроме 0, не остаётся на той же самой прямой.

3.3. Собственные подпространства.

Любая линейная комбинация собственных векторов, соответствующих одному тому же собственному числу λ, является собственным вектором, относящимся к тому же собственному числу λ. Отсюда следует, то все собственные векторы, соответствующие одному и тому же числу λ, образуют линейное пространство, которое является подпространством в R^n.

Докажем теорему о том, что собственные векторы, соответствующие различным собственным числам, образуют линейно независимую систему.

Пусть $L(x)=\lambda_1 x, L(y)=\lambda_2 y$. Предположим (от противного), что x, y - линейно зависимая система, это означает, что векторы коллинеарны: $y=cx$.

С одной стороны, $L(y)=L(cx)=cL(x)=c\lambda_1 x$, но то же время $L(y)=\lambda_2 y=\lambda_2 cx$. Получается, что $\lambda_1 cx=\lambda_2 cx$, то есть $\lambda_1=\lambda_2$, что противоречит тому, что собственные числа различны. Итак, предположение коллинеарности собственных векторов, относящихся различным собственным числам, было неверно, значит эти векторы образуют линейно-независимую систему, что и требовалось доказать. Аналогично проводится доказательство для системы из n векторов. Если система $x_1, x_2,..., x_n$ собственных векторов, относящихся соответственно к $\lambda_1,..., \lambda_n$, является линейно зависимой, то один из векторов системы является линейной комбинацией остальных. Положим для определённости $x_n=\sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i$.

Тогда:

$L(x_n)=\lambda_n x_n=\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_n c_i x_i$, но в то же время

$L(x_n)=L\left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{n-1} c_i L(x_i)=\sum_{i=1}^{n-1} c_i \lambda_i x_i$. Тогда разность:

$L(x_n) - L(x_n) = 0 = \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_n) c_i x_i$, что означало бы $\lambda_i = \lambda_n$ для всех индексов i. Но по условию, собственные числа различны. Получили противоречие. Следовательно, система векторов $x_1, x_2, ..., x_n$ линейно независима.

Ядро линейного оператора. Ядром линейного оператора L называется совокупность всех векторов пространства, для которых $Lx = 0$. Легко доказывается, что все такие векторы образуют подпространство:

$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y) = \alpha 0 + \beta 0 = 0$,то есть линейная комбинация векторов принадлежащих ядру оператора, тоже принадлежит ядру. Очевидно, ядро является собственным подпространством, соответствующим числу $\lambda = 0$.

Докажем, что если существует хотя бы один ненулевой вектор, отображаемый линейным оператором в 0, то этот оператор не будет обратимым.

Пусть $Lx = 0$, то есть вектор принадлежит ядру оператора. Тогда для матрицы этого оператора верно $Ax = 0$, то есть однородная система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & ... + a_{1n}x_n & = 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}x_1 & ... + a_{nn}x_n & = 0 \end{cases}$$

имеет нетривиальное решение. Отсюда следует, что матрица A (а это одновременно и основная матрица данной системы уравнений, и матрица линейного оператора) является вырожденной, то есть не существует обратной матрицы, следовательно, для оператора L не существует обратный оператор L^{-1}.

3.4. Матрица линейного оператора в новом базисе.

Матрица линейного оператора в новом базисе вычисляется по формуле $B = C^{-1}AC$, где C - матрица перехода от старого базиса к новому. Особый интерес представляет тот случай, когда новый базис или полностью, или хотя бы частично состоит из собственных векторов линейного оператора. При этом строение матрицы линейного оператора сильно упрощается, а если все n векторов базиса – собственные векторы, то матрица будет диагональной, причём по диагонали расположены n собственных чисел. Допустим, что f_1 - собственный вектор, соответствующий собственному числу λ_1. Тогда этот вектор отображается оператором в вектор $\lambda_1 f_1$, то есть $Lf_1 = \lambda_1 f_1 + 0f_2 + ... + 0f_n$. Это и означает, что первый столбец матрицы оператора состоит из чисел $\lambda_1, 0, ..., 0$. Аналогично $Lf_2 = 0f_1 + \lambda_2 f_2 + ... + 0f_n$, то есть во втором столбце - все нули кроме элемента a_{22}, который равен собственному числу λ_2. Таким же образом для остальных столбцов получается, что единственный ненулевой элемент столбца будет расположен на диагонали матрицы. Если все n векторов базиса – собственные, то матрица оператора диагональная, а если только первые m векторов собственные, то только в первых m столбцах все элементы кроме диагональных будут нулевые.

3.5. Построение матрицы оператора по известным собственным числам и векторам. (Обратная задача к задаче о нахождении собственных векторов). Если известно n собственных чисел и n собственных векторов, можно однозначно определить матрицу оператора, для которого данные числа и векторы будут собственными.

Доказательство. Пусть новый базис состоит из собственных векторов линейного оператора. Матрицу перехода от старого базиса к этому базису обозначим C . Верна формула $B = C^{-1}AC$, где B - матрица оператора в новом базисе, она является диагональной и содержит n собственных чисел по диагонали. Умножая это матричное равенство справа на C^{-1} , а слева на C , получим формулу для вычисления матрицы оператора: $A = CBC^{-1}$.

Пример. Найти матрицу линейного оператора, для которого собственными числами являются 1, 2 и 3, а собственными векторами соответственно $a_1 = (-1, \quad 1, \quad 0)$, $a_2 = (1, \quad 0, \quad 3)$, $a_3 = (0, \quad 1, \quad 2)$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 6 & 7 & -2 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

В §5 приведены варианты задач по теме «собственные числа и векторы».

В задачах (1-90) есть 3 различных характеристических корня. В задачах (91-180) есть один корень кратности 2. Во всех задачах корни – целые действительные числа.

§4. Симметрические операторы. Квадратичные формы.

4.1. Симметрические операторы и их свойства.

Определение. Линейный оператор $L: R^n \to R^n$ называется симметрическим, если для любых векторов $x, y \in R^n$ выполняется $(Lx, y) = (x, Ly)$.

Перечислим основные свойства симметрического линейного оператора [1].

1. Линейный оператор является симметрическим тогда и только тогда, когда его матрица в любом базисе симметрична.

2. Собственные векторы симметрического линейного оператора, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

4. Всякому собственному числу кратности k симметрического оператора соответствует линейно независимая система из k собственных векторов.
5. Для всякого симметрического линейного оператора существует базис в пространстве R^n, состоящий из его собственных векторов.

4.2. Билинейные и квадратичные формы.

Определение. Билинейной формой на пространстве R^n называется отображение $f: R^n \times R^n \to R$, сопоставляющее каждой паре векторов число, причём:

$$f(\alpha x + \beta y, z) = \alpha f(x, z) + \beta f(y, z)$$

$$f(x, \alpha y + \beta z) = \alpha f(x, y) + \beta f(x, z).$$

Всякую билинейную форму можно задать с помощью матрицы:

$$f(x,y)=\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

То есть, $f(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_i y_j$.

Замечание. Обычное скалярное произведение также является билинейной формой и соответствует единичной матрице E .

Если положить $x=y$ для билинейной формы, то полученное отображение $f: R^n \to R$ называется **квадратичной формой** на пространстве R^n .

Квадратичная форма имеет вид $f(\overline{x})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_i x_j$. Поскольку $x_i x_j = x_j x_i$, то на значение квадратичной формы влияют только суммы вида $b_{ij}+b_{ji}$, а не каждое слагаемое в отдельности. Отсюда очевидно, что квадратичную форму всегда можно задать с помощью симметрической матрицы.

Если квадратичная форма имеет вид $f(\overline{x})=\sum_{i=1}^{n} b_{ii}x_i$, то она называется квадратичной формой в **каноническом виде**.

Теорема. Любую квадратичную форму в R^n можно привести к каноническому виду с помощью перехода к новому базису.

Доказательство. Для симметрического оператора всегда существует n собственных чисел, и, соответственно, n собственных векторов. Отсюда следует, что в новом базисе, составленном из этих собственных векторов, матрица оператора будет диагональной. Такое свойство базиса, состоящего из собственных векторов симметрического оператора, позволяет применять симметрические операторы к преобразованию квадратичных форм. Ведь всякая квадратичная форма задаётся симметрической матрицей, значит, её матрица может быть преобразована к диагональному виду. Это означает, что в новом базисе квадратичная форма не будет содержать произведений различных переменных, а будет состоять только из вторых степеней переменных.

Алгоритм приведения квадратичной формы к главным осям:

1) Построить матрицу квадратичной формы.
2) Найти собственные числа и векторы, записать квадратичную форму (коэффициентами при квадратах новых переменных будут найденные собственные числа).
3) Нормировать собственные векторы и записать матрицу перехода от старого базиса к новому (а именно, состоящему из найденных векторов).

Пример 1. привести к главным осям квадратичную форму третьего порядка.

$f(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + 2xz$.

Построим матрицу этой квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдём собственные числа и векторы: $\lambda=0, \lambda=3$. Простому корню 0 соответствует собственный вектор $a_1=(-2, \quad -2, \quad 2)$, кратному корню 3 соответствуют два собственных вектора: $a_2=(1, \quad 2, \quad 3)$, $a_3=(10, \quad -8, \quad 2)$. Запишем матрицу перехода, предварительно поделив каждый вектор на его модуль.

$$C=\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{10}{\sqrt{168}} \\ -\frac{2}{\sqrt{12}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & -\frac{8}{\sqrt{168}} \\ \frac{2}{\sqrt{12}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{168}} \end{pmatrix},$$

а квадратичная форма имеет вид: $f(x_1, y_1, z_1)=3{y_1}^2+3{z_1}^2$.

Пример 2. (с дробными коэффициентами квадратичной формы). Привести к главным осям квадратичную форму третьего порядка.

$$f(x,y,z)=-\frac{7}{6}x^2-\frac{7}{6}y^2+\frac{1}{3}z^2+\frac{5}{3}xy-\frac{4}{3}yz-\frac{4}{3}xz$$

Решение. Сначала построим матрицу квадратичной формы.

$$A=\begin{pmatrix} -\frac{7}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{6} & -\frac{7}{6} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Найдём 3 собственных числа. $\lambda = 1$, -1 , -2. Затем для каждого собственного числа найдём собственный вектор и нормируем его.

$\lambda = 1$ x= $\left(1/\sqrt{6}, \quad 1/\sqrt{6}, \quad -2/\sqrt{6} \right)$

$\lambda = -1$ x= $\left(1/\sqrt{3}, \quad 1/\sqrt{3}, \quad 1/\sqrt{3} \right)$.

$\lambda = -2$ x= $\left(1/\sqrt{2}, \quad -1/\sqrt{2}, \quad 0 \right)$

Квадратичная форма в новом базисе: $f(x_1, y_1, z_1) = x_1^2 - y_1^2 - 2z_1^2$.

§ 5. Приложения. Задачи для самостоятельного решения и самопроверки.

В задачах 1 – 90 все 3 характеристических корня различны, в задачах 91 – 150 есть корень кратности 2.

5.1. найти матрицу линейного оператора, отображающего систему векторов a1, a2, a3 в систему векторов b1, b2, b3.

Вариант 1

a1=(0 -4 -1) b1=(16 -8 6)
a2=(1 -5 -5) b2=(21 -22 15)
a3=(2 4 1) b3=(-14 14 -6)

Вариант 2

a1=(1 3 2) b1=(13 16 1)
a2=(4 0 5) b2=(1 16 4)
a3=(4 4 5) b3=(17 32 0)

Вариант 3

a1=(2 -1 0) b1=(3 -4 4)
a2=(4 -2 -3) b2=(12 -5 17)
a3=(5 -5 0) b3=(0 -5 0)

Вариант 4

a1=(3 2 -3) b1=(-11 5 15)
a2=(0 -1 -1) b2=(1 -4 -1)
a3=(0 -2 -4) b3=(-4 -14 2)

Вариант 5

a1=(-1 2 -2) b1=(-4 -5 2)
a2=(-1 -4 1) b2=(23 -5 -19)
a3=(3 -5 -3) b3=(16 -2 -11)

Вариант 6

a1=(-4 -2 -2) b1=(-4 18 -32)
a2=(2 -4 -3) b2=(11 3 -11)
a3=(0 3 3) b3=(-6 -9 18)

Вариант 7

a1=(1 -5 2) b1=(-29 -31 14)
a2=(4 5 1) b2=(5 8 -22)
a3=(-4 -2 -5) b3=(19 11 0)

Вариант 8

a1=(-3 3 -2) b1=(12 -11 -3)
a2=(2 -4 2) b2=(-20 16 10)
a3=(3 -3 3) b3=(-15 15 3)

Вариант 9

a1=(4 5 -3) b1=(-19 -17 18)
a2=(-1 4 -1) b2=(-4 6 20)
a3=(0 -5 3) b3=(11 -3 -26)

Вариант 10

a1=(-1 1 4) b1=(-4 21 5)
a2=(1 1 -1) b2=(8 -5 6)
a3=(-4 -4 4) b3=(-32 20 -24)

Вариант 11

a1=(2 1 -2) b1=(3 -12 9)
a2=(2 -4 2) b2=(-14 -16 8)
a3=(-2 -1 -3) b3=(-13 -8 11)

Вариант 12

a1=(0 -3 4) b1=(-21 6 -25)
a2=(-3 -3 0) b2=(-9 -21 6)
a3=(1 0 4) b3=(-12 17 -21)

Вариант 13

a1=(2 3 4) b1=(1 18 2)
a2=(3 -5 2) b2=(-27 11 -1)
a3=(4 1 -2) b3=(-13 -4 -6)

Вариант 14

a1=(-3 1 1) b1=(-12 -2 -8)
a2=(3 0 0) b2=(9 3 15)
a3=(3 -5 -5) b3=(24 -2 -20)

Вариант 15

a1=(-3 -2 -4) b1=(32 9 -7)
a2=(0 3 1) b2=(-15 -1 14)
a3=(5 4 0) b3=(-36 -29 1)

Вариант 16

a1=(-4 -5 -3) b1=(2 17 -24)
a2=(-1 2 -4) b2=(-6 1 -6)
a3=(2 2 0) b3=(0 -4 6)

Вариант 17

a1=(2 -1 2) b1=(-11 -5 -9)
a2=(-1 2 4) b2=(5 -4 -10)
a3=(0 1 0) b3=(3 -1 -3)

Вариант 18

a1=(0 0 3) b1=(3 -3 -3)
a2=(-3 0 -1) b2=(-10 -2 -8)
a3=(-1 -3 -1) b3=(-10 -3 4)

5.2. найти все собственные числа и собственные векторы для оператора.
Задачи 1-90: все характеристические корни различны.

Вариант 1
$$\begin{matrix} 9 & 8 & -4 \\ -4 & -3 & 2 \\ 5 & 7 & 0 \end{matrix}$$
Вариант 2
$$\begin{matrix} 7 & 1 & -13 \\ -4 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & -2 \end{matrix}$$
Вариант 3
$$\begin{matrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{matrix}$$
Вариант 4
$$\begin{matrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 6 & 5 \\ -2 & -2 & -1 \end{matrix}$$
Вариант 5
$$\begin{matrix} -3 & -10 & -6 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{matrix}$$
Вариант 6
$$\begin{matrix} -3 & -5 & -6 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{matrix}$$
Вариант 7
$$\begin{matrix} 4 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \end{matrix}$$
Вариант 8
$$\begin{matrix} 4 & -4 & -6 \\ 3 & -3 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{matrix}$$
Вариант 9
$$\begin{matrix} 5 & 2 & 2 \\ -8 & -4 & -6 \\ 4 & 3 & 5 \end{matrix}$$
Вариант 10
$$\begin{matrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{matrix}$$
Вариант 11
$$\begin{matrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 5 & -33 & 8 \end{matrix}$$
Вариант 12
$$\begin{matrix} 10 & 3 & 8 \\ -24 & -5 & -24 \\ -1 & -1 & 1 \end{matrix}$$
Вариант 13
$$\begin{matrix} 2 & -1 & 0 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{matrix}$$
Вариант 14
$$\begin{matrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{matrix}$$
Вариант 15
$$\begin{matrix} -2 & -1 & 4 \\ -4 & 1 & 4 \\ -5 & -1 & 7 \end{matrix}$$
Вариант 16
$$\begin{matrix} 5 & -6 & 2 \\ 6 & -11 & 4 \\ 15 & -33 & 12 \end{matrix}$$
Вариант 17
$$\begin{matrix} 2 & -4 & -2 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 12 & 7 \end{matrix}$$
Вариант 18
$$\begin{matrix} 13 & 18 & -4 \\ -7 & -10 & 2 \\ 9 & 15 & -1 \end{matrix}$$
Вариант 19
$$\begin{matrix} 11 & 6 & -18 \\ -8 & -4 & 14 \\ 4 & 3 & -5 \end{matrix}$$
Вариант 20
$$\begin{matrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{matrix}$$
Вариант 21
$$\begin{matrix} 0 & -1 & -1 \\ 5 & 6 & 7 \\ -3 & -3 & -4 \end{matrix}$$
Вариант 22
$$\begin{matrix} -8 & -18 & -10 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 5 \end{matrix}$$
Вариант 23
$$\begin{matrix} -8 & -9 & -10 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 5 \end{matrix}$$
Вариант 24
$$\begin{matrix} 5 & 6 & 3 \\ -6 & -7 & -3 \\ 4 & 6 & 4 \end{matrix}$$
Вариант 25
$$\begin{matrix} 5 & -6 & -6 \\ 6 & -7 & -6 \\ -2 & 3 & 4 \end{matrix}$$
Вариант 26
$$\begin{matrix} 5 & 3 & 3 \\ -12 & -9 & -10 \\ 6 & 5 & 6 \end{matrix}$$
Вариант 27
$$\begin{matrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{matrix}$$
Вариант 28
$$\begin{matrix} 2 & -3 & 0 \\ 2 & -11 & 2 \\ 9 & -57 & 11 \end{matrix}$$
Вариант 29
$$\begin{matrix} 21 & 7 & 20 \\ -36 & -10 & -36 \\ -10 & -4 & -9 \end{matrix}$$
Вариант 30
$$\begin{matrix} -2 & -1 & 1 \\ -9 & 2 & 3 \\ -3 & -3 & 2 \end{matrix}$$

Вариант 31

3	-4	4
-1	0	2
-3	3	-1

Вариант 32

-5	-2	6
-6	-1	6
-7	-2	8

Вариант 33

4	-6	2
9	-19	6
24	-54	17

Вариант 34

1	-4	-2
-2	-9	-4
4	22	10

Вариант 35

-1	-14	-8
1	8	4
-2	-10	-4

Вариант 36

-5	-13	-11
4	10	8
-2	-4	-2

Вариант 37

-2	-2	-2
5	5	4
-1	-1	0

Вариант 38

2	4	0
-1	-2	-1
1	2	3

Вариант 39

-2	2	6
3	-1	-6
-2	2	6

Вариант 40

-2	-2	-12
-3	-1	-12
1	1	6

Вариант 41

-5	-8	-6
2	4	2
3	4	4

Вариант 42

-3	24	-5
-1	6	-1
-2	6	0

Вариант 43

9	-2	-3
-3	2	1
24	-6	-8

Вариант 44

-1	2	-2
-7	8	-6
-6	6	-4

Вариант 45

0	-8	-4
1	5	2
-2	-6	-2

Вариант 46

-1	18	16
1	-8	-8
0	12	10

Вариант 47

7	21	27
-4	-14	-20
2	6	8

Вариант 48

-6	-4	-4
-1	0	-1
9	6	7

Вариант 49

6	4	4
-11	-9	-10
3	3	4

Вариант 50

2	0	4
1	4	1
-3	-6	-5

Вариант 51

2	0	4
2	4	2
-3	-3	-5

Вариант 52

4	-6	-12
-3	7	12
2	-6	-10

Вариант 53

4	6	24
3	7	24
-1	-3	-10

Вариант 54

-5	-3	-3
12	6	4
-6	-2	0

Вариант 55

11	16	10
-4	-6	-4
-5	-8	-4

Вариант 56

7	-42	9
1	-4	1
0	12	-2

Вариант 57

-13	4	5
9	-2	-3
-42	12	16

Вариант 58

8	-1	-6
6	1	-6
10	-1	-8

Вариант 59

-10	24	-8
-9	19	-6
-15	27	-8

Вариант 60

2	16	8
-1	-3	-2
2	2	2

Вариант 61

2	-18	-16
-1	9	8
0	-12	-9

Вариант 62

-6	-21	-27
4	15	20
-2	-6	-7

Вариант 63

7	4	4
1	1	1
-9	-6	-6

Вариант 64

-5	-4	-4
11	10	10
-3	-3	-3

Вариант 65

-1	0	-4
-1	-3	-1
3	6	6

Вариант 66

-1	0	-4
-2	-3	-2
3	3	6

Вариант 67

6	3	3
-12	-5	-4
6	2	1

Вариант 68

-10	-16	-10
4	7	4
5	8	5

Вариант 69

-6	42	-9
-1	5	-1
0	-12	3

Вариант 70

14	-4	-5
-9	3	3
42	-12	-15

Вариант 71

-2	2	-2
-13	13	-10
-12	12	-9

Вариант 72

-7	1	6
-6	0	6
-10	1	9

Вариант 73

11	-24	8
9	-18	6
15	-27	9

Вариант 74

-1	-16	-8
1	4	2
-2	-2	-1

Вариант 75

-3	20	20
2	-9	-10
-1	13	12

Вариант 76

7	25	35
-4	-17	-26
2	7	10

Вариант 77

-8	-5	-5
-1	0	-1
11	7	8

Вариант 78

7	5	5
-14	-12	-13
4	4	5

Вариант 79

3	2	6
1	4	1
-4	-8	-7

Вариант 80

3	1	6
2	4	2
-4	-4	-7

Вариант 81

4	-8	-15
-3	9	15
2	-8	-13

Вариант 82

4	8	30
3	9	30
-1	-4	-13

Вариант 83

-7	-4	-4
16	8	6
-8	-3	-1

Вариант 84

13	20	12
-5	-8	-5
-6	-10	-5

Вариант 85

10	-1	-8
8	1	-8
13	-1	-11

Вариант 86

-13	30	-10
-12	25	-8
-21	39	-12

Вариант 87

2	20	10
-1	-3	-2
2	0	1

Вариант 88

8	5	5
3	4	3
-13	-11	-10

Вариант 89

-7	-5	-5
12	10	9
-2	-2	-1

Вариант 90

5	14	2
-3	-8	-3
2	4	5

В задачах 91-180 есть кратный корень

Вариант 91

3	-2	-4
-1	2	2
1	-1	-1

Вариант 92

0	-1	-1
3	4	3
-1	-1	0

Вариант 93

3	1	1
-4	-1	-2
2	1	2

Вариант 94

-1	-4	-2
1	3	1
1	2	2

Вариант 95

-3	-1	-4
-12	-2	-12
8	2	9

Вариант 96

4	-1	-1
-3	2	1
9	-3	-2

Вариант 97

1	0	0
-3	4	-2
-3	3	-1

Вариант 98

-1	0	2
-2	1	2
-3	0	4

Вариант 99

4	-6	2
3	-5	2
6	-12	5

Вариант 100

-2	-8	-4
1	4	1
1	2	3

Вариант 101

-2	-4	-4
2	4	2
1	1	3

Вариант 102

3	1	1
-4	-2	-4
2	2	4

Вариант 103

3	-6	1
1	-4	1
4	-24	6

Вариант 104

14	4	12
-12	-2	-12
-9	-3	-7

Вариант 105

-1	0	1
-3	2	1
-6	0	4

Вариант 106

0	-1	2
-2	1	2
-2	-1	4

Вариант 107

2	0	0
-1	-3	-2
2	10	6

Вариант 108

7	-8	-16
-4	3	8
4	-4	-9

Вариант 109

7	4	4
0	-1	0
-8	-4	-5

Вариант 110

-5	-4	-4
12	11	12
-4	-4	-5

Вариант 111

-5	-8	-8
0	-1	0
4	8	7

Вариант 112

-5	-4	-8
0	-1	0
4	4	7

Вариант 113

-1	8	12
0	-9	-12
0	8	11

Вариант 114

7	4	4
-16	-9	-8
8	4	3

Вариант 115

-9	-16	-8
4	7	4
4	8	3

Вариант 116

11	-4	-4
-12	3	4
36	-12	-13

Вариант 117

5	12	4
-2	-5	-2
3	9	4

Вариант 118

7	9	3
-4	-5	-2
2	3	2

Вариант 119

0	-1	-1
-1	0	-1
3	3	4

Вариант 120

3	1	1
-2	0	-1
0	0	1

Вариант 121

5	4	4
-1	0	-1
-2	-2	-1

Вариант 122

4	-15	3
1	-4	1
3	-15	4

Вариант 123

-4	1	2
0	1	0
-15	3	7

Вариант 124

3	-2	2
4	-3	4
3	-3	4

Вариант 125

2	4	2
-1	-3	-2
2	8	5

Вариант 126

9	24	8
-4	-11	-4
6	18	7

Вариант 127

13	18	6
-8	-11	-4
4	6	3

Вариант 128

-1	-2	-2
-2	-1	-2
6	6	7

Вариант 129

9	8	8
-2	-1	-2
-4	-4	-3

Вариант 130

7	-30	6
2	-9	2
6	-30	7

Вариант 131

-9	2	4
0	1	0
-30	6	13

Вариант 132

5	-4	4
8	-7	8
6	-6	7

Вариант 133

3	8	4
-2	-7	-4
4	16	9

Вариант 134

-16	-15	15
12	11	-12
-6	-6	5

Вариант 135

11	24	12
-3	-7	-3
-3	-6	-4

Вариант 136

11	12	12
-6	-7	-6
-3	-3	-4

Вариант 137

-4	-3	-3
12	11	12
-6	-6	-7

Вариант 138

-4	18	-3
-3	17	-3
-12	72	-13

Вариант 139

5	3	-6
6	2	-6
6	3	-7

Вариант 140

-4	-5	5
4	5	-4
-2	-2	3

Вариант 141

1	0	0
-1	0	-2
1	1	3

Вариант 142

5	8	4
-1	-1	-1
-1	-2	0

Вариант 143

5	4	4
-2	-1	-2
-1	-1	0

Вариант 144

0	-1	-1
4	5	4
-2	-2	-1

Вариант 145

0	6	-1
-1	7	-1
-4	24	-3

Вариант 146

-11	-4	-12
12	5	12
9	3	10

Вариант 147

3	1	-2
2	2	-2
2	1	-1

Вариант 148

-2	4	8
2	-0	-4
-2	2	6

Вариант 149

4	2	2
-6	-4	-6
2	2	4

Вариант 150

-2	-2	-2
8	6	4
-4	-2	0

Литература

1. Горбанёв Н.Н., Ельцов А.А., Магазинников Л.И. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Томск, 2001. 164 с.
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – Москва Физматгиз, 1963 – 432 с.
3. Магазинников Л.И., Магазинникова А.Л. Практикум по линейной алгебре и аналитической геометрии. Томск, 2005. 104 с.
4. Александрова Н.В. Из истории векторного исчисления. Москва, Изд-во МАИ, 1992. 152 с.